［研究ノート］

菱形分割に関する研究

青木孝子*[1]

Abstract

This paper is the consideration that a circle divides 360 degrees and we watch drawing rhombuses on the plane figure as the sketch of polyhedra.division into three, four and five pieces were to do it, and a parallelohedra watched in succession. In other words they are polyhedra doing space filling alone.

Finally we considered the resemblance with those sketches and sketch of the regular polyhedron.

1　はじめに

平面に描かれた図形は、立体の見取り図として見ることで、その次元が広がっていく。円の中心角は 360°であり、これを等分して円周に向けて放射状に直線を引く。このときにできる 2 辺を持つ菱形を描き出してみる。つまり、このときの菱形は 1 種類である。菱形を描くには、2 辺からなる角度が 180°未満にならなければならない。そのため、最低でも 3 本の直線を引く必要がある。こうしてできる平面図形には、多面体の見取り図となっているものが存在する。

さらに、菱形の平面で構成される菱形多面との関連の考察も行った。先行研究として、別宮（1988）は、菱形分割についての研究を行い、それを正多面体と半正多面体との関連として、菱面体として凹多面体の考察を行っている。また宮崎（1988）は多胞体としての空間充填形の研究を行った。本稿は、菱形分割を行うと同時に、多面体の見取り図を考察し、凸多面体としての菱形多面体とその空間充填について、考察したことをまとめたものである。

＊1　東海大学現代教養センター

2　三分割から分かること

まず、360°を 3 等分し、合同である菱形を 3 つ描くことから始めよう。1 つの中心角は 120°という鈍角になるので、菱形を描くと、もう 1 種類の角は 60°になる。図 1 のように、外側は、正六角形となる。

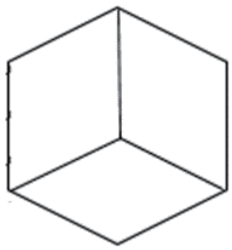

図 1

これは、平行六面体の二次元表示である見取り図に相当する。平行六面体は、単独空間充填をする。つまり、1 種類で空間をすき間なく埋め尽くすことができる多面体である。このようにして見たときには、ここでは 3 面しか見えないが、裏側は、上下をひっくり返したように描かれる 3 面が存在する。また、平行六面体は、紙などで編んで作製することができる。4 面が連なるものを 3 本使用して編める。ゾーンが 3 つ存在する多面体だからである。

この見取り図は、2 種類の菱形十二面体の見取り図にも相当する。このことは、後で触れることする。

平行六面体の面が正方形となるときが立方体であり、正多面体の 1 つである。正多面体に関して議論を進めるが、外側が正六角形となる正多面体の見取り図は、もう 1 つある。それは正八面体の見取り図で、正八面体は、立方体の双対多面体である。つまり、立方体と正八面体のペトリ—多角形は、正六角形になる。それを図に描くと図 2 のようになる。中には、放射状ではなく、正三角形を描くことで示される。双対多面体、つまり頂点と面を入れ換えてできる多面体であるので、放射状の中心が、正三角形の中心と正確に一致するからである。

ここでも、正八面体として見ると 4 つの三角形しか見えないが、裏側に上下をひっくり返したように描かれる 4 面が存在する。よって、ここでは描いていないが、投影図として裏側も描くと、中の正三角形が上下をひっくり返した形で現れるので、ダビデの星が描かれることになる。

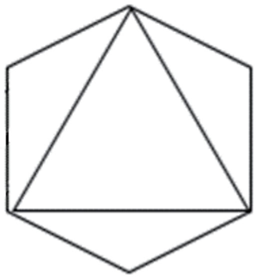

図２

また、中には何も描かずに、それを１つの多面体の見取り図とすると、錐などの他の場合も考えられるが、対面にも同じ面が存在するときには、正六角柱である。高さも等しいときには、全ての辺の長さが等しくなり、アルキメデスの正角柱に分類される。このアルキメデスの正六角柱は、四次元立方体の三次元模型の１つであり、単独空間充填をする性質を持つ。

３　四分割から分かること

360°を 4 等分すると、90°と直角になるので、正方形が４つできる。これを図に描くと、図３のようになる。外側の形も正方形となり、１辺の長さが２倍になっている。いわゆる田の字形である。[1]

これは、多面体の見取り図として見ると、対角線比が白銀比の菱形十二面体であることが分かる。この白銀比菱形十二面体も、単独空間充填をする性質がある。

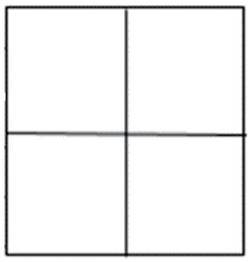

図３

白銀比菱形十二面体は、図 1、つまり三分割をしたときの見取り図となる方向が存在する。その菱形の鈍角は、マラルディの角度となっている。そのとき、対面にも図１の上下をひっくり返したように、菱形３つが並んでいる。全部で十二面あるので、表面３つと裏面３つが存在し、その途中には、この方向からでは潰れて見えなくなる面が６面存在する。つまり平行に６面の菱形が並んでいる。このゾーンは４存在することが分かる。よって、この多面体もまた、編んで作製ができる。面が６面連なる形状のものを４本用いて、編んで作製することが可能である。菱形をつなぎ合わせるので、帯状といってもジグザグした形状のものである。立方体を、

この１つのゾーンだけ平行移動させた多面体であるので、四次元立方体の三次元模型の１つであると考えられる。

この白銀比菱形十二面体を、この見取り図の方向から考察を進める。この対面から見ても、これと同じように４つの菱形が存在する。その間には、同じ向きに、鋭角どうしが相接するように、４つの菱形が１周するように並んでいる。この鋭角部分に、菱形の１辺と同じ長さの辺を入れて、この４つの菱形を等辺の平行六辺形に置き換える。こうすることで、長菱形十二面体ができあがる。これは、四次元立方体である菱形十二面体を、１辺の長さ分だけ平行移動してできるので、五次元立方体の三次元模型の１つとして知られている。

４　五分割から分かること

360°を５等分すると、72°となり、ここで鋭角となる。よって、この２辺で菱形を描くと、円の外側にはみ出すように描かれる。その菱形のもう１種類の角度は 108°となる。その周囲にも菱形を５つ描くことができる。図４で描かれるとおりである。

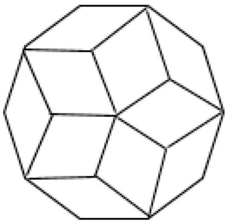

図４

この菱形は、鋭角のほうが 64°で、鈍角のほうが 144°となる。このとき外側は、正十角形となる。正十角形の１つの内角は、144°である。つまり、この平面に描かれた外側の５つの菱形は、中の５つの菱形とは合同ではないが、ここでの多面体の見取り図を考察する際には、立体図形は合同とみなして考察を進めることにする。

まず、この見取り図となる多面体は、対角線比が黄金比の菱形からなる菱形二十面体と菱形三十面体の２つが考えられる。最初に、菱形三十面体として考察を進めよう。

菱形三十面体は、二十・十二面体の双対多面体である。カタランの立体に分類される。二十・十二面体は、辺に注目をすると、正十角形の赤道６本から成り立っている。この頂点を菱形の中心に置き換えた多面体が、菱形三十面体である。したがって、菱形三十面体は、菱形が 10面連なるものを６本使って編むことができる。ゾーンが６存在することになるからである。

このうち、１つのゾーンを取り除くと、菱形二十面体となる。その分だけ潰れたような平板な多面体になるが、図４のような見取り図になる方向が２方向存在する。よって、図４の面の対面からも同じように見える。菱形二十面体は、１本取り除いた残りの５本のゾーンから成り立っている。つまり、菱形が８面連なるものを５本使って編むことが可能である。菱形二十面体を、この１つのゾーンだけ平行移動すると菱形三十面体になるため、菱形三十面体は菱形二十面体の四次元多面体の三次元模型であることが分かる。

この見取り図からは話がそれるが、さらに、菱形二十面体の 5 本のゾーンのうち、1 本を取り除くと、菱形十二面体ができる。これは、図 4 で考察した白銀比菱形十二面体とは異なる多面体で、黄金比菱形十二面体と呼ぶべきものである。黄金比菱形十二面体は、菱形が 6 面連なるものを、4 本編んで作製される。つまり、4 本のゾーンで成り立っている多面体である。同様に、菱形二十面体は、黄金比菱形十二面体を平行移動させてできるため、その四次元多面体の三次元模型の 1 つであると言える。

この多次元についての考察をまとめると、面の数が一番少ない平行六面体から見ると、一度平行移動したものが黄金比菱形十二面体であるので、それは四次元多面体の三次元模型の 1 つである。さらに平行移動したものが、菱形二十面体であるので、これは、平行六面体の五次元多面体の三次元模型の 1 つである。さらに平行移動させると菱形三十面体であるので、平行六面体の六次元多面体の三次元模型の 1 つが、菱形三十面体ということになる。

また、見る方向によっては、図 1 のように、外側が正六角形に見える。よって、このときも平行六面体にゾーンが入った多面体となっているため、平行六面体の四次元多面体の三次元模型の 1 つと考えることができる。この黄金比菱形十二面体も単独空間充填をする。

見方を変えて、黄金比菱形十二面体の見取り図の 1 つを、これらに関連したものとして考えると、矩形に見える方向が存在する。この多面体の場合は、図 4 のような外側が正方形とはならず、外側は、黄金比菱形の対角線の短い方と長い方からなる、辺の長さが黄金比の長方形になる。見取り図としては、黄金比長方形の辺の中点を結んで、4 等分にした黄金比長方形 4 つが描かれることが分かる。

白銀比菱形十二面体のときと同様の作業を行い、1 辺の長さと同じ長さだけ引き伸ばしてみる。つまり、4 つの菱形が、鋭角と鈍角が接するように 1 周するような位置関係にある。引き伸ばすことで等辺の平行六角形になるが、それは 2 種類できることが分かる。つまり、鋭角の方が伸びた形と、鈍角の方が伸びた形の 2 種類である。ここでできる多面体もまた、黄金比長菱形十二面体と呼ぶべきものである。先ほど考察したように、黄金比菱形十二面体が四次元多面体であることから、この黄金比長菱形十二面体は五次元多面体の三次元模型とみなすことが可能である。この多面体もまた単独区間充填をする。

5　正多面体に関して外側が正多角形になる見取り図

正多面体に関連して考察をする。菱形とは外れることから図は描いていない。1 つの頂点から見下ろすように見ると、外側を正三角形とし、中に放射状に 3 本の線が存在する正四面体の見取り図を描くことができる。これとは別に、1 つの辺の中点から見ると、外側を正方形とし、中には中心から頂点に向けて直角二等辺三角形が 4 つ描かれるような見取り図を描くことができる。このときがペトリー多角形となっている。

先ほど、図 1 は立方体の見取り図で、同じ外側の図形で、中を描き換えると図 2 として、正八面体の見取り図になることを見た。

図 4 は、正十角形であるので、中を描き換えることで、正十二面体と正二十面体にも描くこ

とができる。この 2 つの正多面体のペトリ―多角形は正十角形になるからである。この 2 つは双対多面体である。また、どちらも辺の中点で頂点を切り落とすと、二十・十二面体になる。これは先ほど述べたように、菱形三十面体の双対多面体である。正十二面体は、中の中央に小さい正五角形を描いて、その頂点から外側の頂点に向けて、周りに放射状に 5 本の線を引く。正二十面体は、中に内接する大きい正五角形を描いて、中に放射状に 5 本の線を描く。

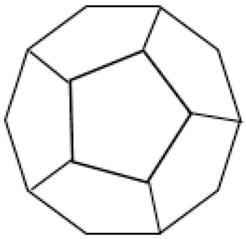

図５

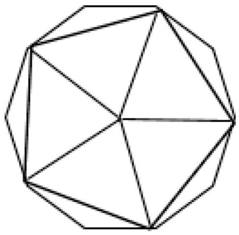

図６

プラトンの立体に分類される凸の正多面体 5 種は、放射状の線と、外側の正多角形の辺と頂点が半分の正多角形を内部に描きこむという、見取り図の描き方にも類似点が見出されるのは興味深い。

６　まとめ

360° という角度を等分して、菱形分割することで描かれる見取り図と多面体との関連を考察した。

3 等分と 4 等分は、見取り図の外側が正三角形と正方形という平面充填する図形であり、多面体としても空間充填をする。正四面体と正八面体で空間充填をするので、単独ではないものまで認めると、空間充填する多面体は、見取り図が平面を埋め尽くすことがわかる。通常、ダブル充填形[2]というときは、展開図が平面充填し、かつ多面体が空間充填するものを指す。今回は、見取り図が平面充填し、かつ多面体が空間充填をするので、その意味でのダブル充填形と呼ぶべきものである。

5 等分までは、幾何学的に意味のある多面体との関連があることがわかった。5 等分からは鋭角となるため、外側にも菱形を描くことができる。多面体としては、対角線比が黄金比の菱

形となり、その構成面からなる多面体は5種類存在する。これらを適当に組み合わせることで空間を充填していくが、そのことに関しては今後の考察の課題としたい。

今回の考察から、平行移動に注目することで、いくつかの多次元模型との関連を見た。このうち、空間充填をするもののみを列挙すると、平行六面体（三次元立方体)、アルキメデスの正六角柱（四次元立方体)、白銀比菱形十二面体（四次元立方体)、長菱形十二面体（五次元立方体)、黄金比菱形十二面体（四次元平行六面体）である。また今回の考察からは外れたが、切頂八面体（六次元立方体）も単独空間充填をする。この切頂八面体も含めると、等辺の多面体のうち単独区間充填するものは、すべて出そろうことになる。2 つの菱形十二面体はまとめて菱形十二面体とすると、5 種類にまとめられ、平行多面体と呼ばれている。面の形が 1 種類のものは編んで作ることができることも、説明を行った。

また、今回は 5 分割まで考察を行ったが、さらに細分化することも、今後考えていきたい。そうすることで2カ所の曲に辺が集まるポーラー･ゾーン多面体を考察することが可能となる。このように、さらに発展した考察が期待できるため、今後の課題としたい。

去る 2018 年 8 月 20 日、大阪で開催された数学教育談話会での「菱形分割から分かること」と題した発表の場で、京都大学名誉教授一松信先生には適切な助言を頂いた。この場を借りて御礼を申し上げる。

注

1）一松（2010）pp.123-124.　ここで、「上から見ても、前から見ても、横から見ても、同じ田の字形（厳密にいうとこれを 45°回転した形）に見える 3 次元の図形はなんでしょうか？」という問いが立てられている。答えは、菱形十二面体である。田の字形という語が用いられているため、幾何学的な用語ではないことを承知で、本論でも使用した。

2）ダブル充填形に関しては、宮崎（2016）において、「中村義作はダブル充填多面体と呼んでいる」とある。また、Akiyama (2014-2015) では、〝double duty polyhedral", "double duty solids"、つまり、「ダブル充填多面体」、「ダブル充填立体」として登場する。

参考・引用文献

1）Jin Akiyama, Kiyoko Matsunaga, 2014-2015, " A Trek Into Intuitive Geometry"

2）一松信，2010『正多面体を解く』東海大学出版会

3）別宮利昭，1988「正・準正多面体と菱面形」『京都大学物性研究』51(1)：A29-A39

4）宮崎興二，1988「正多胞体による 4 次元空間充填図形」『京都大学物性研究』51(1)：A14 –A23

5）宮崎興二，2016『多面体百科』丸善出版