

# 2つの指標によるクラス編成問題

八木英一郎

The Problem of Assigning Students to Classes Using 2 Indicators

Eiichiro YAGI

## Abstract

This study will assess conditions for assigning students in classes by using two indicators: an indicator of students' overall satisfaction and other indicators such as grade. For a long time, when students are to be assigned in classes, based on student survey on class satisfaction, a formula that maximizes students' overall satisfaction in total has been used. No other indicators or elements have been included in the formula. Such formula that students' overall satisfaction is only used may not be effective when a number of students share the same level of satisfaction. In order to overcome this problem, it is desirable and realistic to use an additional indicator such as grade and then to assign students in classes.

## Keywords

mathematical programming, assigning students in class, students' satisfaction

## 1. 問題の背景と概要

複数の学生を複数のクラスに配属させる問題はクラス編成問題とよばれているが、本論文では、学生をクラスに配属する際に学生の志望に対する満足度以外の優先順位を与えることで、より現実的なクラス編成を行うことを試みる。従来のクラス編成問題において

は、各クラスに対する学生への志望調査を基にそれらの志望に対する学生全体の総満足度を最大化するような定式化を行いクラスの編成を行っており、志望に対する満足度以外の情報は用いられていない。しかし、クラス編成を実施する際に同じ満足度の学生が複数いる場合は、成績順などをもとに優先される学生を定めるなど、配属の際に優先性を考慮することが求められた。本論文では学生の総満足度という指標に加え、優先順位を定める指標を導入することで、より現実的な状況を反映させたクラス編成を得ることを試みる。

## 2. クラス編成問題に関する従来の研究

クラスを編成する問題もしくはそれに類似したグループの編成問題は、今野等によりクラス編成問題として研究されている（[今野 朱,1991], [今野,1992], [今野,1997]）。これらの文献で中心となっている考え方は、クラス編成問題を「すべての学生はどれか1つのクラスに所属する。」「どのクラスも定員をオーバーしてはならない。」という2つの条件を満足し、学生の各クラスに対する志望の強さの合計を最大にするという定式化をしてクラス編成を行うことにある。またその際に、学生の各クラスに対する志望を表すための点数のよりよい与え方や、各クラスにおいて一定の学生数を充足するような定式化や、学生数の増大に対する定員の検討も行っている。

また、この応用例として学科に対する学生の割当問題[今野 竹内,1998]、コンピュータ室など教育設備による定員の制約が生じる選択科目に対するクラス編成問題[八木,2007]が研究されている。

## 3. 本論文で扱うクラス編成問題とその定式化

### 3.1. 従来クラス編成問題の定式化

#### 3.1.1. クラス編成問題の定式化

クラス編成問題は次のように定式化されている[今野,1992]。

$m$  : クラスの総数,  $n$  : 学生数,  $i$  : クラス番号 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $j$  : 学生の番号 ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $a_j$  : 第  $i$  クラスの定員

として、学生をクラスに所属させるか否かを表す  $m \times n$  個の変数を

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に所属させる} \\ 2 & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に所属させない} \end{cases}$$

とする。

このとき必ず満足しなければならない条件として、

- すべての学生はどれか1つのクラスに所属する
- どのクラスも定員をオーバーしてはならない

ということが挙げられており、これらはそれぞれ

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

と定式化することができる。

次に学生  $j$  のクラス  $i$  に対する志望の強さをそのクラスに対する満足度として得点で表し、これを  $e_{ij}$  とする。 $e_{ij}$  の定め方については後で詳述するが、 $e_{ij}$  の値が大きいほど、そのクラスの履修の志望が強いことを表すものとする。従ってあるクラス編成に対するすべての学生の志望の強さの合計は

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}$$

となり、クラス編成問題はこれを最大化するような  $x_{ij}$  を定める問題となる。以上より、クラス編成問題は次のような最大化問題として定式化される。

目的関数：

$$\max \quad \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

### 3.1.2. 様々なタイプのクラス編成問題

上記定式化に加えて選択必修科目<sup>1)</sup>のクラスにおける編成問題においては、履修者が極端に少なくなるクラスの防止のため、すべてのクラスは定員の一定の割合を充足しなければならないという条件を上記のモデルに追加している。このため定員充足率を  $\alpha$  とし、

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq \alpha a_i \quad i = 1, \dots, m$$

という制約条件を前出の最大化問題に追加することが提案されている[今野,1992]。

また、コンピュータ室などの教室設備を用いた実習を中心とする選択科目の授業に対するクラス編成問題で、編成に要する時間的制約があるために編成作業全体（希望調査を締め切ってからクラス編成の発表まで）を数時間程度で行うための工夫、クラス間に割り当てられた学生数の差を減らすことが提案されている[八木,2007]。前者の工夫としてはWebを用いて学生の各クラスに対する学生の志望調査を行い、学生に直接データの入力を行わせることでデータ入力の効率化を図り、計算時における入力情報として用いることを容易にしている。そして今野によるクラス編成問題[今野,1992]においては志望を第3志望までに限定しているが、これは主としてクラス編成者によるデータ入力の手間によるものと考えられ、Webを用いる場合は第3志望まででも全クラスへの志望を尋ねてもクラス編成者の手間はほとんど変わらず、より学生の希望を反映するためにここではすべてのクラスに対して点数付けを行うことを学生に求めている。後者については先に示した定員充足率を用いた定式化は選択必修科目の場合であり、学生は必ずどれかのクラスを履修するという前提が存在する。しかし、完全な選択科目の場合、希望するクラスでない場合、他に空きがあるクラスがあっても履修を行わない学生が少なくない。また、非常に希望するクラスに空きがあるのにもかかわらずあまり希望していないクラスに配属されると、配属された学生の不満が増す。このため、初めに実行可能なクラス編成におけるすべての学生の志望の強さの合計の最大値を求め、次にその値を制約として各クラスの人数が均一化するように、次のように数理計画法を多段階に適用することを提案している。

#### 第1段階：志望の強さの合計の最大値の算出

以下の手順ではここで得られた最大値を満足するように編成を行う。これにより編成は常に学生の志望が最優先されたものとなる。

#### 第2段階：学生数最小クラスの学生数最大化

極端に人数の少ないクラスが生じることはできるだけ避けたいため、第2段階として学生数が最小のクラスにおける学生数の最大化を図る。

#### 第3段階：学生数最大クラスの学生数最小化

学生数が多いクラスの存在も避けたいため、第3段階として、学生数が最大のクラスにおける学生数の最小化を図る。

#### 第4段階：クラス人数の均一化

以上の3条件を満たすクラス編成の中でできるだけ各クラスの人数が均一化するような、クラス編成を求める。

### 3.2. 本論文で扱うクラス編成問題

本論文で扱うクラス編成問題は、それぞれ定員を持つ各クラスに対して学生を配属させる問題となる。配属の前提条件として、学生本人の各クラスに対する志望を調査し、できる限りその志望に沿うように配属を行う。この時、あるクラスに志望している学生の数とそのクラスの定員が等しいまたは少ない場合は志望者全員をそのクラスに配属させることができるが、クラスの定員よりも志望者が多い場合何らかの方法でそのクラスに配属させる学生と他のクラスに配属させる学生を定めなければならない。従来の研究においては、学生の志望を調査しそれを元に各クラスに対する満足度を定め、配属された全学生の満足度の和である総合満足度を最大化するようにクラス編成をしていたが、この際に、例えば成績優秀な学生の希望を優先させるなど、学生の志望に対する満足度以外の要因を考慮したいという要請がなされていた。本論文では、学生の志望に対する満足度に加え、割付の際の優先度を考慮するクラス編成問題を扱う。

### 3.3. 本論文における定式化

クラス編成問題における各学生の志望を優先させる指標として学生  $j$  の優先度を  $c_j$  と定義する。この優先度  $c_j$  は成績などを元に定めるものであり、 $c_j$  の値が大きいほど優先されるものとする。優先度値  $c_j$  を割付に反映させるには、各学生の各クラスへの満足度  $e_{ij}$  を  $c_j$  を用いて補正しなければならない。すなわち、総満足度最大化の目的関数

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}$$

を補正して、例えば

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j e_{ij} x_{ij}$$

または

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (w c_j + e_{ij}) x_{ij}$$

と設定し、計算を行えばよいことになる（ただし  $w$  は  $c_j$  と  $e_{ij}$  のどちらを優先するかを示すウェイトで  $w \geq 0$  ( $w = 0$  の時は学生の満足度のみを考慮することになる) とする）。

この定式化の問題点は設定可能な目的関数の候補が複数存在し一意に定めることが難しいことにあり、得られた割付からその良否を判断することは難しい。そこで、得られた配属案を評価するための指標として、本論文では学生の満足度のみを最大化することによって得られる割付  $x_{ij}^*$  による総満足度

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}^*$$

と、優先度  $c_j$  を考慮した割付により得られた結果  $x_{ij}^{**}$  による総満足度

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}^{**}$$

の差を取る。この差は、優先度を考慮することにより満たされなくなった学生の総満足度を示しており、得られた結果を検討する際の有力な指標だと考えられる。

以上より本論文で提案する手順は次のようになる。

手順1：満足度のみを考えた定式化における総満足度を求める。

目的関数：

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}$$

制約条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1 & j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i & i = 1, \dots, m \\ x_{ij} &= 0 \text{ or } 1 & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

手順2：優先度を考慮した配属案を求める。

目的関数として優先度と満足度の積をとる場合

目的関数：

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j e_{ij} x_{ij}$$

制約条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1 & j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i & i = 1, \dots, m \\ x_{ij} &= 0 \text{ or } 1 & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

目的関数として優先度と満足度の和をとる場合

目的関数：

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (wc_j + e_{ij}) x_{ij}$$

制約条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1 & j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i & i = 1, \dots, m \\ x_{ij} &= 0 \text{ or } 1 & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

手順3：得られたそれぞれの配属案に対する準備段階との総満足度の差を求める。

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}^* - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}^{**}$$

## 4. 数値例と考察

### 4.1. 数値例

実際のある2次募集でのクラス編成において提案した方法を適用した。対象クラス数は5であり各クラスの定員は表1に示すようになっている。対象学生数は47人であり、Webアンケートにて6段階（0：希望しない～5：非常に希望する）で各クラスに対する希望調査を行った。なお、実際に割り付けられるクラスは1クラスのため、複数のクラスに5点をつけても不公平は生じない[今野,1992]。また、優先度については成績を元に  $0 \leq c_j \leq 4$  となるような指標を各学生に対して定めた。優先度を考慮する際の目的関数として「優先度と満足度の積」「優先度と満足度の和 ( $w = 0.1$ )」「優先度と満足度の和 ( $w = 0.5$ )」「優先度と満足度の和 ( $w = 1$ )」の計4通りを設定した。各クラスに配属された人数、総満足度、総満足度の差を「満足度のみ」のものも含めて目的関数別に表2に

表1：各クラスの定員

クラス	A	B	C	D	E
定員	5	14	16	9	5

表2：各クラスへの割付人数と総満足度

目的関数	A	B	C	D	E	総満足度	総満足度の差
満足度のみ	5	14	16	8	4	187	—
満足度と優先度の積	5	14	16	8	4	182	5
満足度と優先度の和 ( $w = 0.1$ )	5	14	16	8	4	187	0
満足度と優先度の和 ( $w = 0.5$ )	5	14	16	8	4	187	0
満足度と優先度の和 ( $w = 1$ )	5	14	16	8	4	187	0

表3：各クラスの平均満足度と平均優先度

	平均満足度					平均優先度				
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
満足度のみ	5	4.64	2.31	5	5	2.89	2.76	2.41	2.58	2.39
満足度と優先度の積	5	4.79	1.88	5	5	3.23	2.79	1.84	3.26	2.71
満足度と優先度の和 ( $w=0.1$ )	5	4.64	2.31	5	5	3.07	2.76	2.25	2.63	2.71
満足度と優先度の和 ( $w=0.5$ )	5	4.64	2.31	5	5	3.07	2.76	2.25	2.63	2.71
満足度と優先度の和 ( $w=1$ )	5	4.64	2.31	5	5	2.89	2.76	2.31	2.63	2.71

示す。「満足度と優先順位」をとった場合は、優先度の影響が強く現れているため「満足度のみ」から得られた結果よりも総満足度が下がっていると考えられる。一方、他に関してはいずれも等しくなっているため、この事例では優先度と満足度の和を最大化することで、学生の総満足度を減らさずに優先度を考慮した割付が可能となっている。

#### 4.2. 考察

紙幅の都合で具体的な配属結果を示すことができないため、表3に各クラスに配属された学生の平均満足度と平均優先度を示す。表2で示したように目的関数を変化させても各クラスへの割付人数と総満足度は等しいが、各クラスの平均満足度と平均優先順位は若干変化している。これは各クラスへの割付人数と総満足度が等しい場合でも、各学生に対する配属結果は異なっていることが多いためである。目的関数最大となる解（配属案）は複数存在する場合があるため、学生の総満足度を下げずに優先度を考慮する場合は、満足度のみの配属で得られた総満足度を制約条件として加え、手順2で優先度を考慮した配属案を求める際に

目的関数として優先度と満足度の積をとる場合

目的関数：

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j e_{ij} x_{ij}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{ij}^* \geq 0$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$



目的関数として優先度と満足度の和をとる場合

目的関数：

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (wc_j + e_{ij})x_{ij}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij}x_{ij}^* \geq 0$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

という形で定式化することが可能となる<sup>2)</sup>。

一方、目的関数に優先度を加えたため、特に優先度の高い学生が、希望クラスに配属されるため希望調査において自分の希望を偽って報告する（以下これを「戦略的操作可能性<sup>3)</sup>」とよぶ）インセンティブが生じる。例えば「Aクラスを非常に希望しており、できればAクラスに配属されたい。Aクラスの配属ができない場合はBクラスでもよいがCクラスは避けたい」という希望を持っている学生（以下学生1と示す）は、Aクラス5、Bクラス4、Cクラス1というような志望の表明を行う。一方、他の学生（学生2と示す）が「Aクラスを非常に希望しており、Aクラス以外はどこも希望しない」という希望を持っている場合、Aクラス5、Bクラス1、Cクラス1というような希望を表明する。満足度のみで配属を決める場合、総満足度最大とするには学生1をBクラス、学生2をAクラスに配属させる（総満足度4 + 5 = 9）ことになるが、学生1は自分が優先されて配属されることを知っている場合、確実に第一希望のAクラスに配属されるためAクラス5、Bクラス1、Cクラス1と希望を表明することが考えられる。この場合、学生1をAクラス、学生2をBまたはCクラスに配属（総満足度5 + 1 = 6）させることになり、学生全体の総満足度は下がることになる<sup>4)</sup>。このため、優先度を考慮してクラス編成を行うことを公表している場合は、学生の表明する志望が戦略的操作可能性によりゆがめられる可能性があり、また、数値例に見られたように学生全体としての総満足度を下げる可能性も存在する。

## 5. 結論

本研究ではクラス編成問題において、学生をクラスに配属する際に満足度以外の優先順

位を考慮する方法を提案した。従来のクラス編成問題においては、各クラスに対する学生の満足度の調査を基に学生全体の総満足度を最大化するような定式化を用いてクラスの編成を行っているが、同じ満足度の学生が複数存在する場合、成績順などをもとに優先順位を定めるなど他の何らかの指標を反映させるクラス編成を行うことを試みた。今後の課題としては、優先度を導入する際の目的関数のそれぞれの定式化の持つ特徴をつかみ好適な目的関数設定を行うこと、優先度の高い学生の戦略的操作可能性への対応を考えることなどが挙げられる。

#### 注

- 1) 一定の科目群の中から指定された単位数以上の科目を履修しなければならないという条件がつけられた科目。一般教養的な科目に多く見られる。
- 2) 当然のことながら、問題によっては解がない場合も考えられる。
- 3) 戦略的操作可能性とは本来「投票により代替案の社会的順序を定める際に、ある投票者が自らの投票順序を偽って報告することによって社会的順序を自らの望ましい方向に変化させること」をいう（[佐伯, 1980]）が、その意図することを本研究で扱うクラス編成問題に当てはめると、「学生が自分の希望するクラスに配属されるために自分の希望を意図的に偽って表明すること」と解釈できるため本論文ではこの意味で用いる。
- 4) 一方、満足度のみで配属を決める場合、学生1がBクラスの志望を1と表明すると、BクラスとCクラスの志望が等しいため、学生1がCクラス、学生2がAクラスと配属される可能性がある。このように満足度のみで配属を決める場合には、第一希望のクラスへの配属を狙ってその他の志望を低く表明することは、希望しないクラスへ配属されるリスクが存在する。従って他の学生の志望が不明という条件の下で、学生にとって最もよい希望の表明法は自分の希望を正直に表明することとなる。

#### 参考文献

- 今野浩. (1992). 数理決定法入門—キャンパスの OR (ページ: pp1-20). 朝倉書店.
- 今野浩. (1997). 実践数理計画法 (ページ: 1-35). 日科技連.
- 今野浩, 朱誌. (1991). 最適クラス編成問題—東京工業大学におけるケーススタディー. オペレーションズリサーチ, 38 (2), pp85-89.
- 今野浩, 竹内敏雄. (1998). 東京工業大学における新学科所属方式. 日本経営工学会論文誌, 48 (6), 259-300.
- 佐伯胖. (1980). 「きめ方」の論理—社会的決定理論への招待. 東京大学出版会.
- 八木英一郎. (2007). 教室設備による人数制約が必要な選択科目におけるクラス編成問題. 日本経営工学会論文誌, 58 (1), 71-77.