

衝撃組合せ負荷を受けるクロスプライ 積層円筒殻の動的安定解析

根岸 航平*1 森下 達哉*2 粕谷 平和*2

Dynamic Stability Analysis of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells under Impact Combined Loads

by

Kohei NEGISHI*1, Tatsuya MORISHITA*2, and Hira-kazu KASUYA*2

(Received on Mar. 28, 2014 and accepted on Jul. 10, 2014)

Abstract

Because of their high specific strength and stiffness, fiber reinforced plastics have been used as structural members in various fields and hence analysis of thin laminated structures is important. In this paper the problem is that of the dynamic stability of cross-ply laminated cylindrical shells subjected to impact combined loads. First of all, the motion of cylindrical shells under simultaneous impact axial compressive load, external pressure and torsion is defined as axially symmetric motion, and their effect on the behavior of the shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is said to be stable if the perturbations remained bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained using Galerkin's method. Calculations are carried out for cross-ply laminated cylindrical shells, and the instability regions are determined by utilizing Mathieu's equation. Mathieu's equation includes static buckling values, so we aim at analyzing the static buckling, whose values are derived from Flügge shell theory. The inevitability of dynamically unstable behavior is proved analytically and the effects of various factors, such as combined load ratio, number of layers and dynamic unstable mode are clarified.

Keywords : Structural analysis, Cross-ply laminated cylindrical shells, Impact combined loads, Dynamic stability, Mathieu's equation

1. 緒言

近年、機械の飛躍的發展に伴い省資源・省エネルギー、高速運転、大型化、経済的設計など様々な観点から構造物の軽量化が要求されている。このような立場から、比強度、比剛性の高い先進複合材料と呼ばれる炭素繊維強化プラスチック(Carbon Fiber Reinforced Plastic ; CFRP)材などからなる積層複合方式が航空宇宙機器、自動車用部品、スポーツ用品等において、多岐に渡り用いられるようになってきている。複合材料積層構造は、他にも耐食性、成形性、耐熱性などにも優れているが、不均質、異方性のため理論的扱いが難しい。また、航空宇宙機器などの複合材料積層円筒殻には衝撃負荷が作用する機会が多いことを考慮すると、衝撃負荷に対する円筒殻の動的安定性の問題を解明することは重要な課題である¹⁻³⁾。

本報告では、両端単純支持した対称クロスプライ積層円筒殻に、衝撃軸方向圧縮力、衝撃ねじりモーメント、衝撃半径方向外圧力を同時に作用させた場合について、動的不安定現象の必然性を示す。解析手法は、基礎方

式から Mathieu 型方程式を導き、Mathieu の安定判別線図を用いて、Flügge の殻理論⁴⁾から求めた静的座屈値以下でも、不安定モードが発生することを明らかにする。また、動的不安定現象に与える諸因子、例えば積層数、積層順序、負荷条件の影響を解析的手法によって検討する。

2. 理論的解析法

2.1 基礎方程式

解析モデルとして、Fig.1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h の対称クロスプライ積層円筒殻が衝撃軸圧縮力 $P_c(t)$ 、衝撃ねじりモーメント $M_t(t)$ 、衝撃半径方向外圧力 $p_e(t)$ の衝撃組合せ負荷を受ける場合について検討する。座標の原点を円筒殻の中央にとり、円筒軸方向を x 軸、円周方向を y 軸、板厚方向を z 軸とし、円筒殻の中央面における各軸方向に発生するそれぞれの変位成分を u 、 v 、 w とする。次に、有限変位理論を用いた円筒殻の中央面における面内ひずみ成分を ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 、曲率変位成分を κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} として、面内ひずみ成分および曲率変位成分と変位成分との関係は、二次の微小項を考慮した有限変形理論より次式で表される。

*1 工学部動力機械工学科 学部生

*2 工学部動力機械工学科 教授

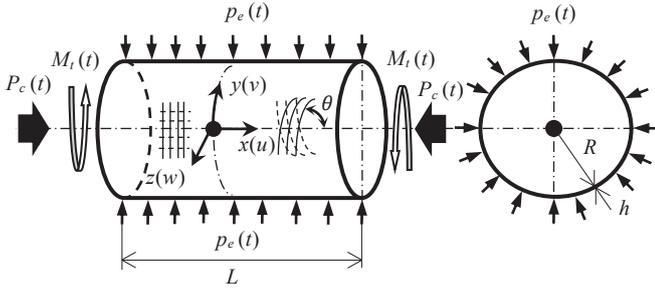


Fig.1 Configuration and coordinates of cross-ply laminated cylindrical shell.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right) \\ \kappa_{xy} &= -\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} (1)$$

また、合応力成分 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} , 合モーメント成分 M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} と面内ひずみ成分, 曲率変位成分の関係を表す Flugge 型の構成方程式を次式に示す.

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{B_{11}}{R} & A_{12} + \frac{B_{12}}{R} & A_{16} + \frac{B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{2R^2} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} + \frac{D_{26}}{2R^2} \\ A_{16} + \frac{B_{16}}{R} & A_{26} + \frac{B_{26}}{R} & A_{66} + \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{2R^2} \\ A_{16} & A_{26} & A_{26} + \frac{D_{66}}{2R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} & B_{16} + \frac{D_{16}}{2R} \\ B_{12} & B_{22} - \frac{D_{22}}{R} & B_{26} - \frac{D_{26}}{2R} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} & B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ B_{16} & B_{26} - \frac{D_{26}}{R} & B_{26} - \frac{D_{66}}{2R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} + \frac{D_{12}}{R} & B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} + \frac{D_{26}}{R} & B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで, A_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)は伸長剛性項, B_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)はカップリング剛性項, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)は曲げ剛性項であり, 各剛性項は, 一方向強化材の繊維方向, 繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L, E_T , ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断弾性係数 G_{LT} が与えられ, 積層数, 積層順序, 積層角が指定されると求めることができる. 円筒殻が対称積

層の剛性項は, $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, B_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$)項は無視される.

そして, 板厚方向の慣性力のみを考慮すると, 面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{N_e(t)}{R} + \frac{N_t(t)}{h} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

境界条件は, 両端単純支持を想定し, 円筒殻の両端 $x = \pm L/2$ の条件は次式のようにになる.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad N_x = 0, \quad v = 0 \quad (4)$$

2.2 解析手法

実際の構造物に作用する衝撃負荷は非常に複雑で, モデル化が困難であり, 円筒殻の直径に対しての板厚が十分に薄いため, 円筒殻に作用する負荷を膜力と考える. 衝撃軸方向膜力を $N_c(t) (= P_c(t)/2\pi R)$, 衝撃円周方向膜力を $N_e(t) (= p_e(t)R)$, 衝撃ねじり膜力を $N_t(t) (= M_t(t)/2\pi R^2)$ とそれぞれ定義する. さらに, 負荷形態の比率をそれぞれ $k_{ct} = N_t(t)/N_c(t)$, $k_{ce} = N_e(t)/N_c(t)$ のように定義し, 計算上の $N_t(t)$, $N_e(t)$ を全て $N_c(t)$ の形で表す.

円筒殻に作用する衝撃組合せ負荷 $N_c(t)$ の負荷条件を次に示す.

$$\left. \begin{aligned} P_c(t) &= \frac{t}{t_p} P_0, \quad N_c(t) = \frac{P_c(t)}{2\pi R} = \frac{t}{t_p} N_0 \quad (0 \leq t \leq t_p) \\ P_c(t) &= P_0, \quad N_c(t) = \frac{P_c(t)}{2\pi R} = N_0 \quad (t_p \leq t) \end{aligned} \right\} (5)$$

これは, 衝撃組合せ負荷が $t = 0$ から作用し, t_p 時間後まで直線的に増加し, t_p 時間後に一定値 N_0 に保たれていることを示している. なお, 円筒殻に作用する衝撃組合せ負荷の継続時間は無限と仮定する.

ここで, 式(5)で示した衝撃組合せ負荷 N_0 は静的座屈値 N_s との比である荷重比 $I (= N_0/N_s)$ を用いて設定している. 静的座屈値 N_s は, 静的組合せ負荷を受ける複合材料積層円筒殻の座屈膜力であり, Flugge の殻理論によって得られる係数行列式を導き, 得られる解の最小値から求めることができる.

2.3 初期運動に関する方程式

初期運動に添え字 A を付けた初期運動の平衡方程式 $H(w_A)$ を次式に示す.

$$\begin{aligned} H(w_A) &= D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + N_c(t) \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} + E_T \frac{w_A h}{R^2} \\ &- \nu_T \frac{N_c(t)}{R} + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} + \frac{N_t(t)}{h} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、負荷が作用した場合の波形モード w_A を次式のように仮定する。ここで、無次元量 α_1, α_2 は $\alpha_1 = La_1/2, \alpha_2 = La_2/2$ である。

$$w_A = a(t)h(1 + A_1 \sin \alpha_1 x \sinh \alpha_2 x + A_2 \cos \alpha_1 x \cosh \alpha_2 x) \quad (7)$$

式(7)の $a(t)$ は初期運動の時間に関する未知数であり、係数 $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\alpha_1\alpha_2 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2(\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \\ A_2 &= -\frac{2\alpha_1\alpha_2 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2(\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) + \frac{[T]}{4D_{11}} I}} \\ \alpha_2 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) + \frac{[T]}{4D_{11}} I}} \end{aligned} \right\} (9)$$

ここで、 $[T]$ は固有ベクトルであり静的座屈値である。

式(6)に式(7)を代入し、Galerkin法を適用することによって、初期運動の時間に関する未知数 $a(t)$ に関する二階常微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a(\mu)}{d\mu^2} + \left(q + r \frac{\mu}{\mu_p} \right) a(\mu) + s \frac{\mu}{\mu_p} &= 0 \quad (0 \leq \mu \leq \mu_p) \\ \frac{d^2 a(\mu)}{d\mu^2} + (q + r)a(\mu) + s &= 0 \quad (\mu_p \leq \mu) \end{aligned} \right\} (10)$$

式(10)中の μ, μ_p はそれぞれ時間 t, t_p を無次元化したもので、 q, r, s は各種衝撃負荷形態時の解析式より求められ、軸圧縮負荷、ねじり負荷、外圧負荷による衝撃組合せ負荷が作用する場合は簡略化された式(11)で表される。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_T} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= R^2 \frac{[T]}{E_T h} \left(\frac{2}{L} \right)^2 \frac{B_1 Y_1 + B_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \\ s &= \frac{R}{h} \frac{[T]}{E_T h} \left(1 + \frac{R}{h} - \nu_T \right) \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} (11)$$

式(11)中の定数 $B_1, B_2, C_1, C_2, Y_0, Y_1, Y_2$ を、以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)A_1 + 2\alpha_1\alpha_2 A_2\} \\ B_2 &= 2\alpha_1\alpha_2 A_1 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)A_2 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4)A_1 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)A_2 \\ C_2 &= -4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)A_1 + (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4)A_2 \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= 1 + \frac{(A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1) \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ &\quad - \frac{(A_1\alpha_1 - A_2\alpha_2) \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ Y_1 &= \frac{\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \alpha_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ &\quad - \frac{A_1}{8} \left(2 - \frac{\sin 2\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\sinh 2\alpha_2}{\alpha_2} \right) \\ &\quad - \frac{(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) \sin 2\alpha_2 \cosh 2\alpha_2}{8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ &\quad + \frac{(A_2\alpha_1 - A_1\alpha_2) \cos 2\alpha_1 \sinh 2\alpha_2}{8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ Y_2 &= \frac{\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ &\quad - \frac{A_1}{8} \left(2 - \frac{\sin 2\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\sinh 2\alpha_2}{\alpha_2} \right) \\ &\quad - \frac{(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) \sin 2\alpha_1 \cosh 2\alpha_2}{8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ &\quad + \frac{(A_1\alpha_1 - A_2\alpha_2) \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2}{8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \end{aligned} \right\} (14)$$

なお、未知数 $a(\mu)$ の初期条件は、 $\mu = 0$ で、

$$a(\mu) = 0, \quad \frac{da(\mu)}{d\mu} = 0 \quad (15)$$

となり、初期条件式(15)のもとで式(10)を解くことによって $a(\mu)$ を求めることができる。

2.4 擾乱に関する方程式

複合材料円筒殻の初期運動に関する安定・不安定を議論するために、微小擾乱変位 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その後の応答を調べる。境界条件を満足する変形様式として、微小擾乱変位と擾乱時の応力関数 F_B を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_B &= U_B(x, t) \sin \frac{ny}{R}, & v_B &= V_B(x, t) \cos \frac{ny}{R} \\ w_B &= b(t)h \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, & F_B &= f_B(x, t) \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} (16)$$

式中の軸方向半波数 m は奇数波で、円周方向波数 n は整数波である。 U_B, V_B は u_B, v_B に関して、 $b(t)$ は擾乱成分の時間に関する未知数で、 f_B は応力関数である。微小擾乱に関する平衡方程式および適合条件式は次式となる。

$$\begin{aligned} I(w_B) &= D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} \\ &\quad + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} + N_c(t) \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \\ &\quad + h \left\{ \nu_T \frac{N_c(t)}{h} - E_T \frac{w_A}{R} \right\} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} - 2N_t(t) \frac{\partial^2 w_B}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} + \frac{N_e(t)}{R} + \frac{N_t(t)}{h} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & E_L \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2v_L E_T - \frac{E_L E_T}{G_{LT}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_T \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4} \\
 & = E_L E_T \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\mu_p < \mu$ における初期運動の安定問題を考える。適合条件式(18)に、仮定した微小擾乱変位および擾乱時の応力関数である式(16)を代入することにより、 f_B に関する4階の偏微分方程式が得られる。そして、求めた f_B を式(16)に代入すると、応力関数 F_B が各種係数を含む次式として求められる。

$$\begin{aligned}
 F_B = \frac{E_T L^2 h}{R} b(t) & \left[- \frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2 (Lm\pi)^2 + (LL)^4} \cos \frac{m\pi x}{L} \right. \\
 & + a(t) \frac{n^2 h}{4R} \{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x \\
 & + H_1 \sin \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x \\
 & + H_2 \sin \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x \\
 & + J_1 \cos \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \\
 & \left. + J_2 \cos \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \right] \sin \frac{ny}{R} \quad (19)
 \end{aligned}$$

ここで、 $k^2, l^4, H_1, H_2, J_1, J_2, m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ を式(20)に示す。

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \left(\frac{E_T}{G_{LT}} - 2v_L \right) \left(\frac{n}{R} \right)^2, \quad l^4 = \frac{E_T}{E_L} \left(\frac{n}{R} \right)^4 \\
 H_1 &= \frac{\gamma_1 B_1 - \delta_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad H_2 = \frac{\gamma_2 B_1 - \delta_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \\
 J_1 &= \frac{\delta_1 B_1 + \gamma_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad J_2 = \frac{\delta_2 B_1 + \gamma_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \\
 m_1 &= \sqrt{\frac{k^2 + \sqrt{k^4 - 4l^4}}{2}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{k^2 - \sqrt{k^4 - 4l^4}}{2}} \\
 \gamma_1 &= \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^4 - 6 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 \\
 & \quad + \left(\frac{kL}{2} \right)^2 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} + \left(\frac{LL}{2} \right)^4 \\
 \gamma_2 &= \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^4 - 6 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 \\
 & \quad + \left(\frac{kL}{2} \right)^2 \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} + \left(\frac{LL}{2} \right)^4 \\
 \delta_1 &= 4 \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} \\
 & \quad + \frac{(kL)^2}{2} \left(\alpha_1 + \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \\
 \delta_2 &= 4 \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha_2^2 \right\} \\
 & \quad + \frac{(kL)^2}{2} \left(\alpha_1 - \frac{m\pi}{2} \right) \alpha_2 \quad (20)
 \end{aligned}$$

2.5 Mathieu 型方程式

擾乱成分の時間に関する未知数 $b(t)$ について導くため、式(17)の平衡方程式に応力関数、負荷条件、各諸値を代入して、Galerkin法を適用し、時間 t の無次元量 ζ を導入すると、次式のようなMathieu型方程式が得られる。

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (21)$$

ここで、Mathieuパラメータ ϕ, ψ の値は次式で表す。

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left\{ \left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{Rh^2} \right. \\
 & \times \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2(nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_T} \\
 & \left. + \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (LL)^4} + Kn^2 W_1 \right\} \\
 & - \frac{1}{\Omega^2} \frac{[T]}{E_T h} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left\{ (m\pi)^2 - 2(m\pi) \left(\frac{nL}{R} \right) + v_T \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \right\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{1}{\Omega^2} Kn^2 \alpha \frac{h}{R} W_1 \quad (23)$$

式中の Ω, K, α は、Galerkin法によって得られる定数項で、 W_1 は円筒殻の形状パラメータ、各種剛性値などからなる項である。

Mathieuパラメータ ϕ, ψ は円筒殻の幾何学形状、各種剛性値および静的座屈値、荷重比などが定まると軸方向半波数 m 、円周方向波数 n のみの関数となるため、 m, n を順次変化させ、安定判別を行う。

複合材料積層円筒殻に静的座屈値よりも低い衝撃組合せ負荷が作用する場合、円周方向波数 n は放物線状に存在し、 n の増大に伴いMathieuパラメータ ϕ, ψ の値は大きくなるが、ほとんどの波形モードが安定領域に含まれる。したがって、本研究ではFig.2に示すMathieuの安定判別線図において最も重要であり、主不安定領域と呼ばれている@近傍について検討する。なお、図中の白い領域は安定領域、塗り潰した領域は不安定領域を示す。

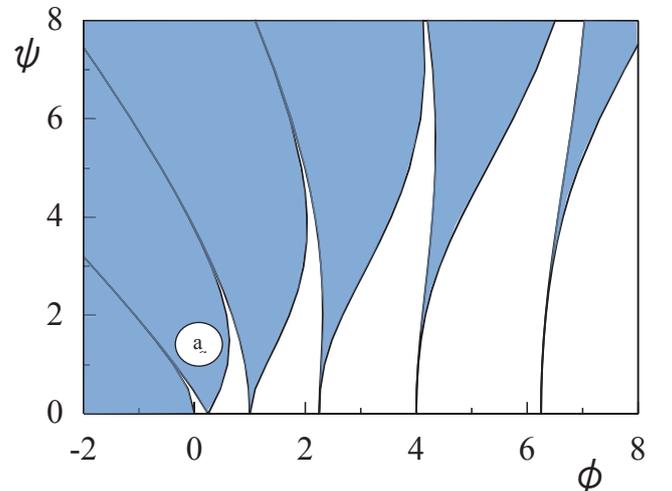


Fig.2 Mathieu's stability diagram.

3. 数値計算例と解析結果の検討

本数値計算例で用いた材料定数は、一般的な航空宇宙機器などに主に使用されている繊維容積含有率 $V_f=60\%$ の炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材を想定し、材料定数は平均化近似解析法により計算され、実験でも確かめられた次の値を用いた⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137[\text{GPa}], E_T = 8.17[\text{GPa}], G_{LT} = 4.75[\text{GPa}] \\ \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189, \rho = 1540[\text{kg/m}^3] \end{aligned} \right\} (24)$$

なお、本数値計算例においては、軸方向波数 $m = 1$ 、形状パラメータ $Z(=L^2/Rh) = 900$ 、半径 R と板厚 h との比 $R/h = 100$ 、負荷形態の比率 $k_{ct} + k_{ce} = 1.0$ として解析を行った。また、最内層積層角 θ は円筒軸方向からの角度である。

数値計算例として、Mathieu パラメータ ϕ, ψ の関係について、積層数 N は、板厚方向に均質な積層数 $N = \infty$ で負

荷形態の比率 $k_{ct} = k_{ce} = 0.50$ として、最内層積層角 $\theta = 0, 90[\text{deg.}]$ とした場合を Fig.3 にそれぞれ示した。次に積層数 N を 3 層, 5 層とし、負荷形態の比率 $k_{ct} = 0.25, k_{ce} = 0.75$ として、最内層積層角 $\theta = 0[\text{deg.}]$ の場合を Fig.4 に最内層積層角 $\theta = 90[\text{deg.}]$ の場合を Fig.5 にそれぞれ示した。次に積層数 N を Fig.4 および Fig.5 と同様に、3 層, 5 層とし、負荷形態の比率 $k_{ct} = 0.75, k_{ce} = 0.25$ として、最内層積層角 $\theta = 0[\text{deg.}]$ の場合を Fig.6 に最内層積層角 $\theta = 90[\text{deg.}]$ の場合を Fig.7 にそれぞれ示した。

3.1 積層構成の影響

Fig.3 より、積層数 N の増加に伴い板厚方向に均質な直交異方性に近づくため、積層数 $N = \infty$ では最内層積層角 $\theta = 0, 90 [\text{deg.}]$ の波形モードの差異はなくなり、積層順序が不安定現象に与える影響がなくなる。

また、最内層積層角 $\theta = 0 [\text{deg.}]$ の場合は、積層数 N の増加に伴い、不安定領域内および円周方向波数 n は低次の波形モードに遷移しているが、 $\theta = 90 [\text{deg.}]$ の場合は、

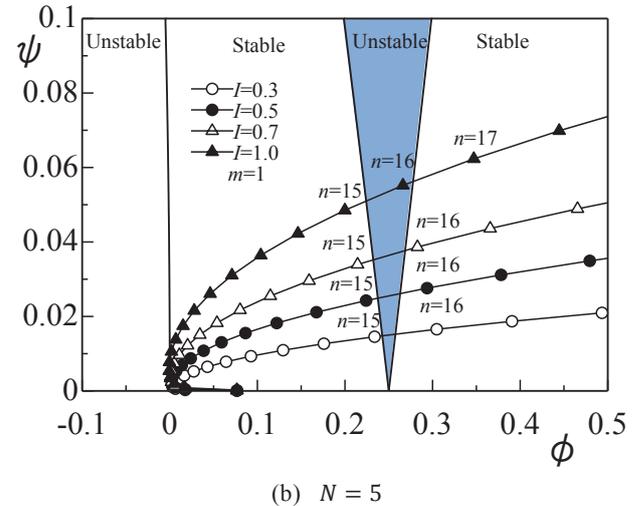
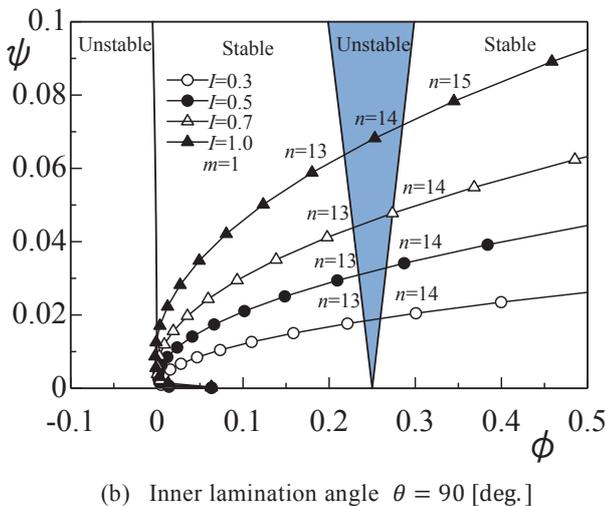
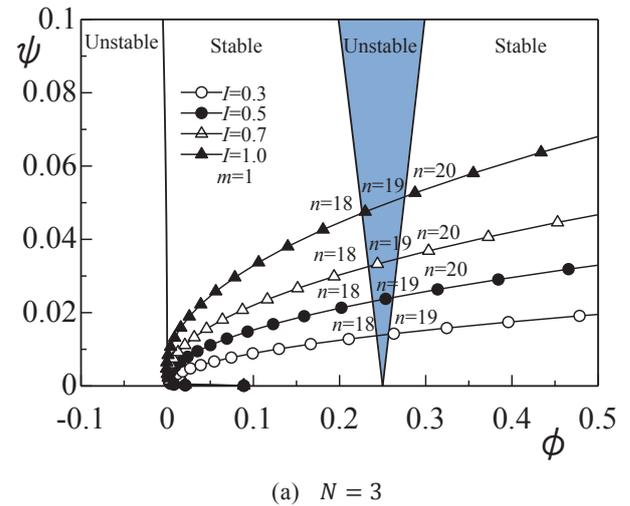
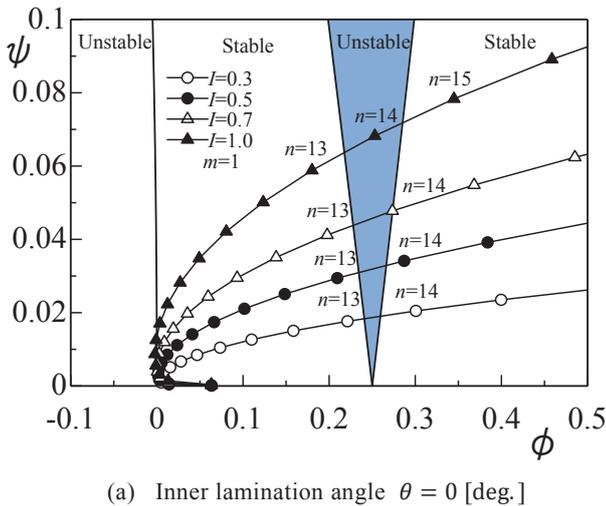


Fig.3 The relation between ϕ and ψ for cross-ply laminated cylindrical shells at $Z = 900, R/h = 100, k_{ct} = 0.50, k_{ce} = 0.50$, number of layers $N = \infty$.

Fig.4 The relation between ϕ and ψ for cross-ply laminated cylindrical shells at $Z = 900, R/h = 100, k_{ct} = 0.25, k_{ce} = 0.75$, inner lamination angle $\theta = 0 [\text{deg.}]$.

積層数の増加に伴い、円周方向波数 n は僅かであるが高次の波形モードに遷移している。これは円周方向剛性値と関係している。円周方向剛性値は、最内層積層角 $\theta = 0$ [deg.]の層は低く、 90 [deg.]の層は高い。本解析における、円筒殻の板厚が一定かつ各構成層が等厚であるという条件を考慮すると、最内層積層角 $\theta = 0$ [deg.]の場合は、積層数 N の増加に伴い、円周方向剛性値の高い積層角 90 [deg.]の層の割合が増加し、 $\theta = 0$ [deg.]の場合は減少する。このような理由で、最内層積層角 θ の差異により、波形モードの遷移に違い表れたと考えられる。

3.2 荷重比 I の影響

本解析では、いずれの場合も荷重比 $I = N_0/N_s = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ と変化させた。これは静的座屈値 N_s に対する3割、5割、7割の衝撃組合せ負荷 N_0 および静的座屈値 N_s と同等の値が作用していることを意味している。その結果、Fig.3の(a), (b), Fig.6の(b)およびFig.7の(b)では、荷重比 $I = 0.7, 1.0$ で不安定モードが発生している。また、

Fig.4の(a)では、荷重比 $I = 0.5, 0.7, 1.0$ で、Fig.6の(a)では、全ての荷重比で不安定モードとなっている。また、荷重比 I が増大すると Mathieu パラメータ ψ が増加し、不安定領域が広がるため、波形モードが不安定領域に入りやすくなっている。このことより、特定の積層構成、荷重条件下において、静的座屈値より低い衝撃組合せ負荷以下においても、不安定モードとなる。

3.3 負荷形態比率の影響

負荷形態の比率 k_{ct} , k_{ce} は Mathieu パラメータ ψ 値に影響するため、 $k_{ct} + k_{ce} = 1.0$ の範囲で変化させた。負荷形態の比率 k_{ct} を増加させると、Mathieu パラメータ ψ 値が増加し、負荷形態の比率 k_{ce} を増加させると、Mathieu パラメータ ψ 値が減少する。これは衝撃軸方向圧縮に対する衝撃ねじりモーメントの割合が増加し、衝撃円周方向外圧の割合が減少すると、高次の波形モードになるので、不安定モードが発生しやすいことが分かる。

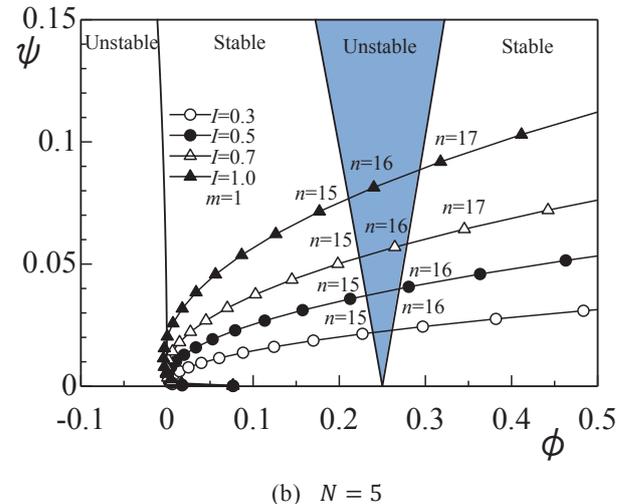
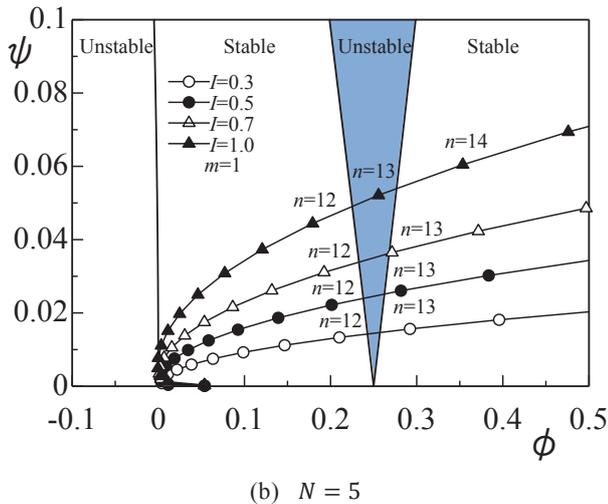
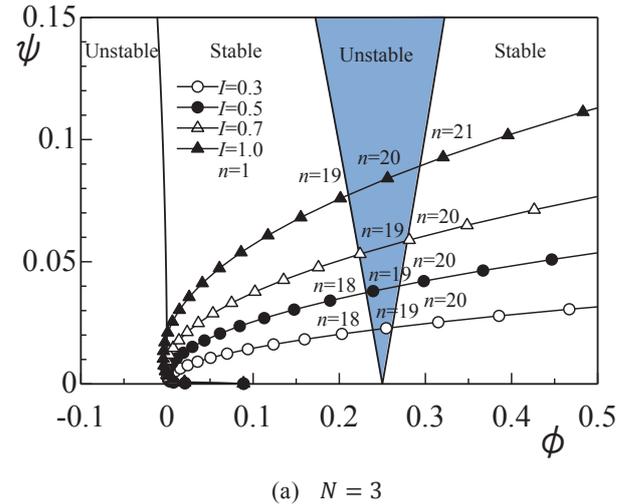
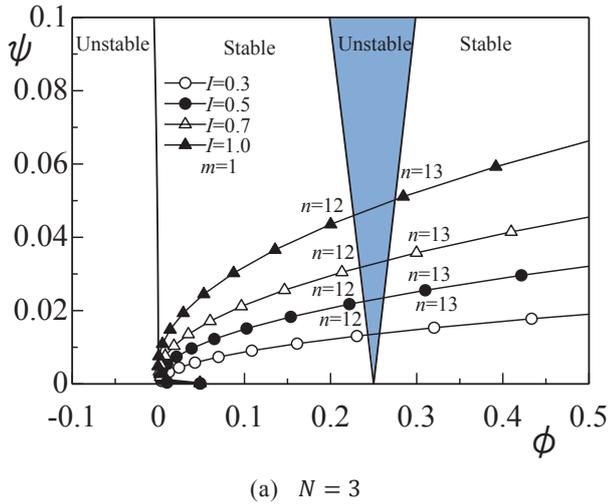
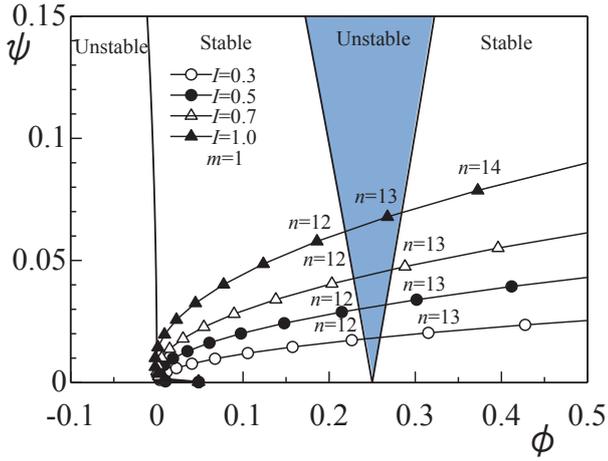
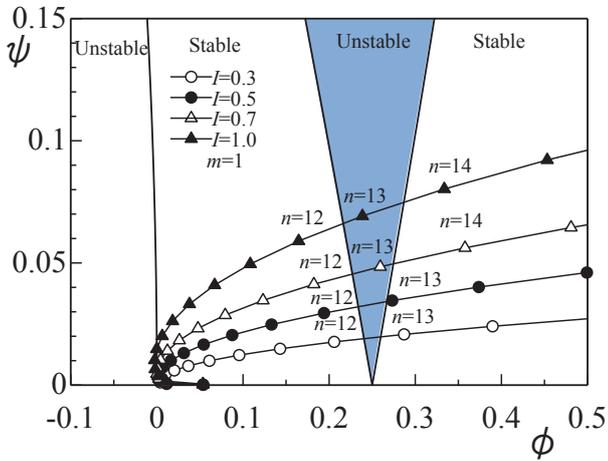


Fig.5 The relation between ϕ and ψ for cross-ply laminated cylindrical shells at $Z = 900$, $R/h = 100$, $k_{ct} = 0.25$, $k_{ce} = 0.75$, inner lamination angle $\theta = 90$ [deg.].

Fig.6 The relation between ϕ and ψ for cross-ply laminated cylindrical shells at $Z = 900$, $R/h = 100$, $k_{ct} = 0.75$, $k_{ce} = 0.25$, inner lamination angle $\theta = 0$ [deg.].



(a) $N = 3$



(b) $N = 5$

Fig.7 The relation between ϕ and ψ for cross-ply laminated cylindrical shells at $Z = 900$, $R/h = 100$, $k_{ct} = 0.75$, $k_{ce} = 0.25$, inner lamination angle $\theta = 90$ [deg.].

4. 結言

本報告では、衝撃軸方向圧縮力、衝撃半径方向外圧力、衝撃ねじりモーメントによる衝撃組合せ負荷を受ける対称クロスプライ積層円筒殻について、構造の安定性の観点から検討した。材料には代表的な炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材を用い、静的座屈値をFlüggeの殻理論を用いて解析を行った。動的安定解析においては、基礎式には有限変位理論を用いて、時間に関する未知数にGalerkin法を適用し、Mathieu型方程式を導き、Mathieuの安定判別線図より安定判別を実施した。そして、微小擾乱運動を考慮することで、構造不安定領域を積層構成の影響と共に示し、静的座屈値と比較して低い衝撃組合せ負荷が作用した場合でも構造不安定となる波形モードが依存する可能性を示した。

なお、本論文ではクロスプライ積層円筒殻のみ解析を行ったが、アングルプライ積層および疑似等方性積層円筒殻など様々な複合材料積層円筒殻の衝撃組合せ負荷の動的安定解析を行うことは今後の重要な研究課題である。

文献

- (1) J.C.Yao : Dynamic Stability of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial and Radial Loads, AIAA, Vol.1, No.6 (1963), pp.1391-1396.
- (2) 永井健一, 八巻昇 : 周期的な圧縮荷重をうける円筒かくの動的安定, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.45, No.395 (1979), pp.1391-1396.
- (3) 粕谷平和, 根本圭一 : 衝撃軸圧縮荷重を受ける複合材料積層円筒殻の動的応答, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.59, No.558 (1993), pp.454-459.
- (4) W.Flügge : Stresses in Shell, Springer-Verlag, Berlin, (1962).
- (5) 植村益次, 山田直樹 : 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975), pp.156-163.