東海大学紀要工学部
Vol.56,No1,2016,pp.27-32

対応原理を用いた圧密粘土の粘弾性定数の測定と有限要素法による地盤の変形解析

横溝　純一[*1]　本間　重雄[*2]

Measurement of Viscoelastic Properties of Consolidated Clay Using the Elastic-Viscoelastic Correspondence Principle and Deformation Analysis of the Ground by the Finite Element Method

by

Jun-ichi YOKOMIZO[*1] and Shigeo HONMA[*2]

(Received on Mar. 28, 2016 and accepted on May 12, 2016)

Abstract

A method for determining the viscoelastic properties of consolidated clay is proposed by using the elastic-viscoelastic correspondence principle for a clay-beam deflection test. A rectangular parallelepiped consolidometer with a standard consolidation section is used for the test, and the elastic modulus and coefficient of viscosity are assessed from the instantaneous deflection and the subsequent change in the deflection of the clay beam over time. The change in elastic modulus is similar to the change in volume compressibility of the clay skeleton as determined by a standard consolidation test, and the coefficient of viscosity increases linearly with the logarithm of consolidation pressure. The viscoelastic behavior of clayey ground can be analyzed with the finite element method by applying the elastic-viscoelastic correspondence principle to the material matrix for an elastic body.

***Keywords*:** Deformation of ground, Deflection of clay beam, Viscoelasticity, Elastic-viscoelastic correspondence principle, Finite element method

1. まえがき

粘土地盤上に構造物荷重が載荷されると，瞬間的な即時沈下とともにせん断変形による変形ならびに圧密沈下が生ずる. Fig.1 は粘土地盤上に幅 B の盛土荷重が載荷された場合の地盤の変形状況を示したものである[1)]. 即時沈下量の算定は地盤を半無限の弾性体とみなし，地盤の弾性係数 E とポアソン比 ν を用いて

$$S_i = pB\frac{1-\nu^2}{E}I_p \qquad (1)$$

により計算される[1,2)]. ここに, p は盛土荷重強さ，I_p は載荷面の形や載荷重の剛性によってきまる影響値である. 圧密沈下量の算定は，圧密理論に基づき最終圧密沈下量や沈下速度を求め，全沈下量をそれらの和として $S = S_i + S_c$ として求めるのが一般的である.

しかし，即時変形の計算では載荷重による粘土の圧縮沈下やせん断変形は瞬間的に生ずるとみなし，変形の時間的推移は圧密理論のみによって算定されている. 飽和粘土が作用応力により変形する際，間隙水の排出による圧密変形と同時に，せん断応力による飽和粘土全体の粘性変形がどのように進行するのかは興味ある問題である.

本研究は先の論文「粘土梁を用いた圧密粘土の弾性係数と粘性係数の測定[3)]」に引き続いて，性質の異なる海成粘土を用いた粘土梁たわみ試験を実施し，弾性体と線形粘弾性体の対応原理を用いて得られる粘弾性定数をもとに，有限要素法による飽和粘土地盤の粘弾性変形解析手法について検討したものである.

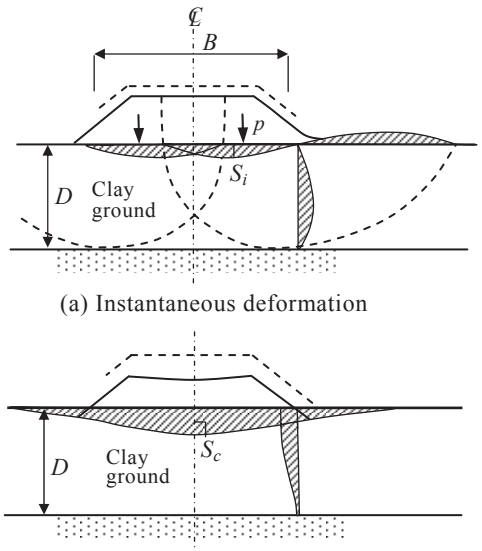

Fig. 1 Deformation of clay ground due to surface loading[1)].

*1 工学研究科土木工学専攻修士課程
*2 工学部土木工学科教授

2. 粘土梁による圧密粘土のたわみ試験

たわみ試験用の矩形断面の粘土供試体を作製するため，Fig.2 に示す直方体圧密容器を用いた．容器の寸法は幅 2.0cm，長さ 14.1cm で，圧密面積を内径 6.0cm の標準圧密試験容器(A=28.3cm^2)と同じくしてある．圧密荷重はポーラスストーンを組み込んだ剛な載荷盤を通じて粘土上面に加えられるので，標準圧密試験で使用する載荷装置と載荷重(10kPa～1.28MPa)がそのまま使用できる．①は圧密容器部品，②③は供試体成形用具である．

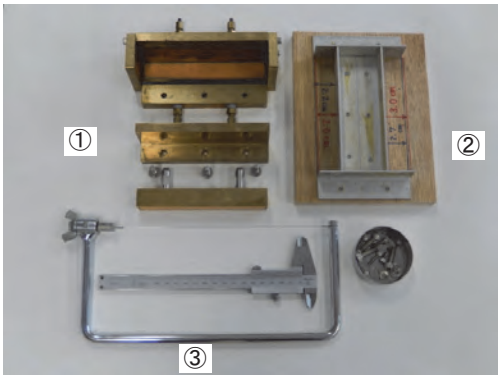

Fig. 2 Rectangular parallelepiped consolidometer.

実験に使用した粘土は，前論文 [3]で用いた彫塑粘土(Carving clay)に加え，堆積環境および性質の異なる海成粘土(Marine clay)を使用した．Table1 にそれらの物理的性質を示す(海成粘土の自然含水比は水浸保存時の含水比である)．

Table 1 Physical properties of clays.

	Carving clay	Marine clay
Soil particle density	2.56 g/cm^3	2.62 g/cm^3
Natural water content	36.2%	65.2%
Liquid limit	58.2%	46.7%
Plastic limit	18.7%	29.1%
75μm finer	100%	100%
5μm finer	77.5%	11.6%
Classification by Plasticity Chart	CH (high liquid limit clay)	ML (low liquid limit silt)

これらの粘土を直方体圧密容器にセットし，標準圧密試験と同様に 20kPa から 640kPa までの載荷重を各一日載荷して圧密量を測定した．Fig.3 は圧密圧力 80kPa と 160kPa における彫塑粘土と海成粘土の時間-圧密量曲線を示したものである．海成粘土のほうが彫塑粘土に比べて同じ圧密圧力に対する圧密量が大きく，一次圧密 50%に対する時間も海成粘土の方が早くなっている．二次圧密は彫塑粘土のほうが顕著に現れており，これらは粘土分含有量の違いによるものと考えられる．

圧密終了後，圧密容器から粘土を乱れが生じないよう注意深く取り出し，Fig.4 に示す粘土梁たわみ試験を実施した．粘土梁は両端可動支点による単純支持とし，たわみ量の測定は梁の中央上部にセットしたレーザー変位計と梁の背面に設置した 1/200 スケール定規による読み取りを併用した(Fig.5).

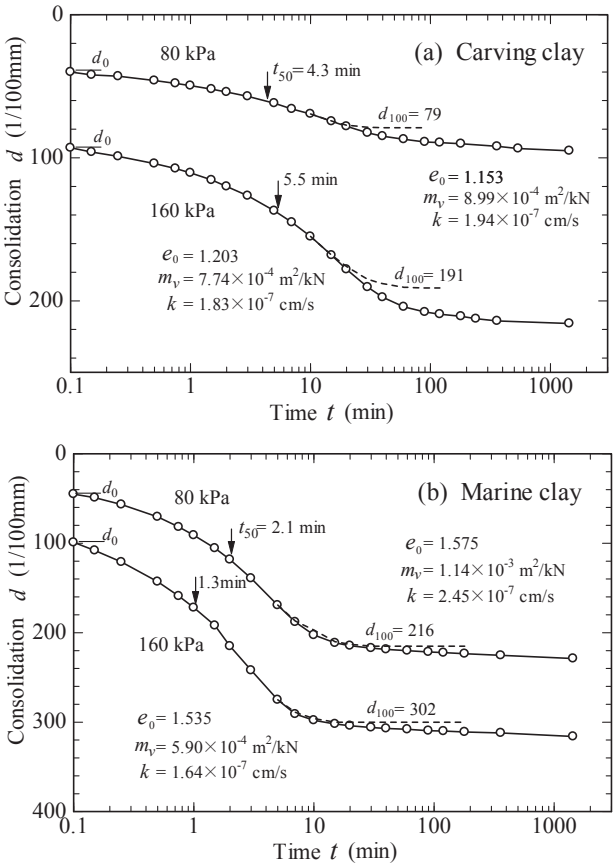

Fig. 3 Time-consolidation curves.

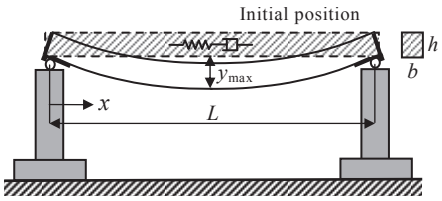

Fig. 4 Clay-beam deflection test.

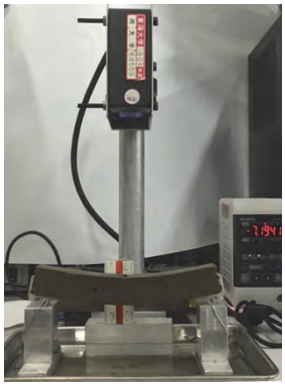

Fig. 5 Measurement of deflection of clay-beam.

粘土梁の高さは，瞬間たわみが 0.5cm～1cm の大きさで測定されるよう Fig.2 に示した成形用具を用いて h=1.0 cm または 0.5 cm に調整した．整形した供試体をステンレスへらを用いて整形器具から注意深く取り出し，供試体下面を粘着力のない木製板で支えながら試験架台にセットした．また，粘土梁の両端にはせん断力による粘土の

変形を緩和するため，プラスチックの L 形ガイド(長さ 2.0cm) を添わせ，表面にはワセリンを塗付してたわみ測定中の粘土の乾燥を防止した．

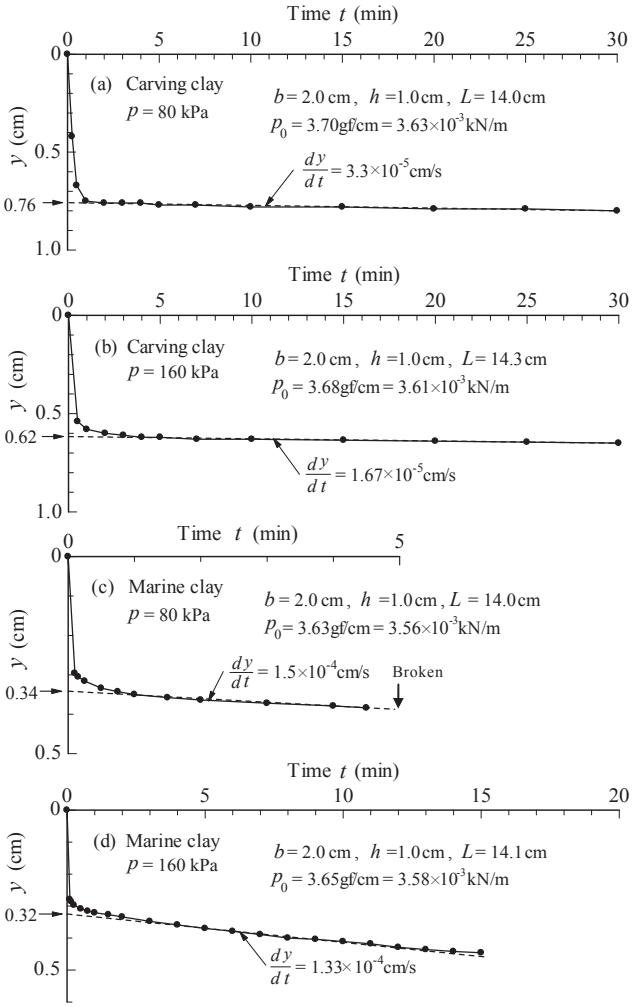

Fig. 6 Results of clay-beam deflection tests.

Fig.6 は圧密圧力 80kPa と 160kPa で圧密した粘土梁のたわみ試験結果を示したものである．たわみは梁の中央位置(x=L/2)で測定し，試験開始時に求めた粘土梁の寸法と重量(自重) を図中に示した．粘土梁は最初 0.3cm～0.7cm ほど急激に撓んだ後，自重によるたわみがゆっくりと増加していく様子がみられる．最初の数分間は，瞬間弾性たわみと粘性たわみとが重なった過渡的な変形(遅延弾性応答)がみられる．

3. 対応原理を用いた圧密粘土の粘弾性定数の決定

等分布荷重 p_0 を受けるスパン L の弾性単純梁の最大たわみは次式で与えられる [4,5]．

$$y_{\max} = \frac{5p_0L^4}{384EI} \tag{2}$$

ここに E は弾性係数, I は断面 2 次モーメントである．よって圧密粘土梁を弾性体とみなせば，梁の I, L と荷重強さ(自重) p_0 が与えられ，たわみ $y_{\max}$ を測定することで粘土梁の弾性係数 E を求めることができる．

外力を受ける物体において，弾性変形と粘性変形とが連続的に生じる粘弾性体として Maxwell 固体を取り上げる．Maxwell 体は，瞬時変形を表すバネと粘性変形を表すダッシュポットが直列に繋がった力学モデルであり，線形 Maxwell 体に対する応力−ひずみ関係は次式で与えられる [6,7]．

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_e}{G} + \frac{\sigma_e}{\eta} \tag{3}$$

ここに G はせん断弾性係数，η は粘性係数である．

一方，準静的問題における弾性体と線形粘弾性体の応力−ひずみ関係に関する対応原理 (correspondence principle)によれば

Elastic	Viscoelastic	
$S_{ij} = 2Ge_{ij}$	$\overline{P}(s)\overline{s}_{ij} = 2\overline{Q}(s)\overline{e}_{ij}$	(4a,b)
$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$	$\overline{\sigma}_{ii} = 3K\overline{\varepsilon}_{ii}$	(5a,b)

の関係があり [7,8]，ここに s_{ij}, e_{ij} はそれぞれ偏差応力，偏差ひずみ，K は体積弾性係数，P, Q は粘弾性演算子，バーのついた量はラプラス変換，s はパラメーターを表す．したがって，弾性解に対する材料定数 G を $\overline{Q}/\overline{P}$ に置き換えれば粘弾性体に対するラプラス変換解となり，その逆変換は粘弾性解となる．

式(2)に含まれる材料定数 1/E を G と K を用いて表すと

$$\frac{1}{E} = \frac{3K+G}{9KG} \tag{6}$$

となるので，Maxwell 体に対する粘弾性演算子$\{P\}=\{\partial_t+1/\tau\}$, $\{Q\}=\{G\partial_t\}$ ($\tau=\eta/G$: 遅延時間)を上式右辺に用いると

$$\frac{3K/\tau+(3K+G)s}{9KGs^2} = \frac{1}{3\eta s^2} + \frac{3K+G}{9KGs} \tag{7}$$

となり，この逆変換を行うと [9] 式(2)に対する粘弾性解は

$$y = \frac{5p_0L^4}{384I}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{3\eta}\right) \tag{8}$$

で与えられる．式(8)の右辺カッコ内より，弾性係数 E による瞬間たわみとともに時間 t に比例する粘性たわみが生ずることがわかる．(t=0 では瞬間たわみのみである.)

前述のとおり弾性係数 E は，瞬間たわみ y_E を測定することで得られる．粘性たわみについては，式(8)を時間 t に関して微分すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5p_0L^4}{384I\cdot 3\eta} \tag{9}$$

となるので，粘性係数 η は次式で求められる．

$$\eta = \frac{1}{3}\left(\frac{5p_0L^4}{384I}\right)/(dy/dt) \tag{10}$$

瞬間たわみの大きさは，載荷直後の粘性たわみへの移行部分を無視し，時間に比例して増加する粘性たわみの直

線部分を延長して求めた (Fig.6 のy軸に示した矢印).

Table 2 と Table 3 は彫塑粘土および海成粘土について式(2)および式(10)によって求めた弾性係数と粘性係数をまとめたものである. 両粘土とも圧密圧力 p の増加につれ, 粘土の弾性係数 E および粘性係数 η は増加していくが, その増加率は圧密圧力の小さい段階での圧力増加に対して大きいようである.（海成粘土の圧密圧力 20kPa による供試体は, たわみ試験を行うことができなかった.）

Table 2 Viscoelastic constants obtained from the deflection tests for carving clay.

Pressure p (kPa)	Elastic deflection y_E (m)	Elastic modulus E (kN/m^2)	dy/dt (m/s)	Coefficient of viscosity η (kPa·s)
20	1.68×10^{-2}	6.30×10^{2}	1.58×10^{-6}	2.23×10^{6}
40	1.03×10^{-2}	1.04×10^{3}	5.00×10^{-7}	7.13×10^{6}
80	7.60×10^{-3}	1.47×10^{3}	3.30×10^{-7}	1.10×10^{7}
160	6.20×10^{-3}	1.89×10^{3}	1.67×10^{-7}	2.35×10^{7}
320	3.85×10^{-3}	2.48×10^{3}	1.39×10^{-7}	2.66×10^{7}
640	6.30×10^{-3}	5.59×10^{3}	1.17×10^{-7}	9.77×10^{7}

Table 3 Viscoelastic constants obtained from the deflection tests for marine clay.

Pressure p (kPa)	Elastic deflection y_E (m)	Elastic modulus E (kN/m^2)	dy/dt (m/s)	Coefficient of viscosity η (kPa·s)
40	1.29×10^{-2}	1.04×10^{2}	3.33×10^{-6}	1.34×10^{5}
80	3.40×10^{-3}	3.37×10^{2}	1.50×10^{-6}	2.32×10^{5}
160	3.20×10^{-3}	8.15×10^{2}	1.33×10^{-6}	7.05×10^{5}
320	6.64×10^{-3}	1.25×10^{3}	1.36×10^{-6}	1.12×10^{6}
640	3.44×10^{-3}	2.44×10^{3}	5.77×10^{-7}	4.85×10^{6}

Fig.7 は圧密試験から得られた体積圧縮係数 m_v とたわみ試験による弾性係数の逆数 $1/E$ (圧縮率)を比較して示したものである. $1/E$, m_v とも圧密圧力 p の増加に対して似通った変化を示していることは興味深い. 圧密試験から得られる体積圧縮係数は, 圧密理論で導入された有効応力に係わる粘土構造骨格の圧縮率であり, 一方たわみ試験から求められた圧縮率は, 粘土粒子および間隙水を含めた粘土全体の巨視的な圧縮率である. Fig.7によれば粘土構造骨格の圧縮率は粘土全体の巨視的圧縮率の約 1.5 倍の大きさとなっており, 両者とも圧密圧力の増加につれて同様の減少傾向を示している.

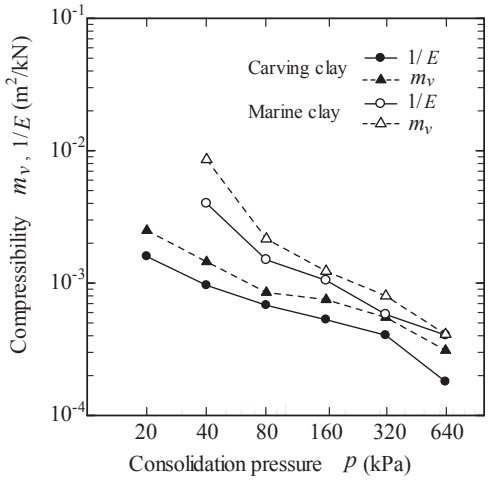

Fig. 7 Change in compressibility of clays with consolidation pressure.

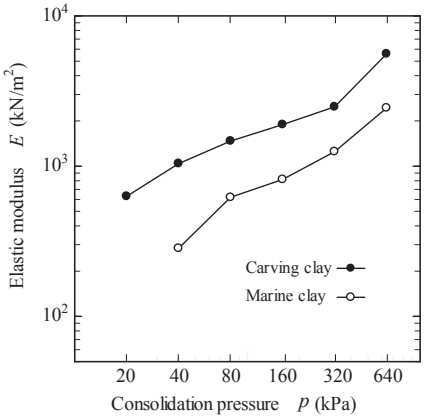

Fig. 8 Change in elastic modulus with consolidation pressure.

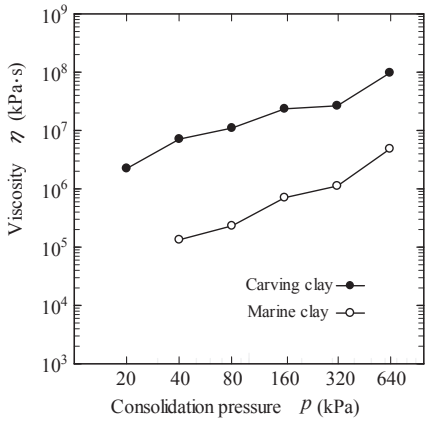

Fig. 9 Change in viscosity with consolidation pressure.

Fig.8 は圧密圧力の変化に対する両粘土の弾性係数の変化を示したものである. 全体的に弾性係数の対数が圧密圧力の対数に比例して増大していることがわかる. Fig.9 は圧密圧力に対する粘性係数の変化を示したもの

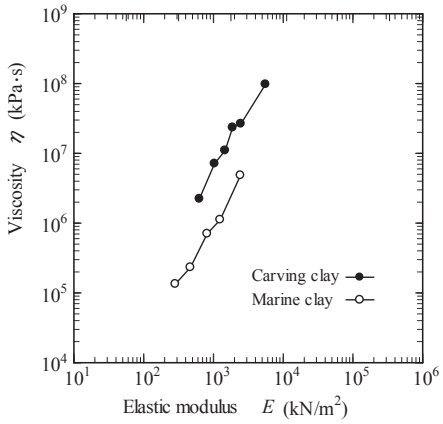

Fig. 10 Relation between elastic modulus and coefficient of viscosity of consolidated clay.

で，圧密圧力の増加に対する粘性係数の増加率は Fig.8 に示した弾性係数の増加率に比べて大きいようである．

Fig.10 はたわみ試験から得られた粘土の弾性係数と粘性係数の関係を示したものである．弾性係数の増加に対して粘性係数は両粘土とも約 2 倍の増加率を示している．このことは，圧密により粘土骨格が収縮するとその弾性的な変形に比べて粘性変形が大きく低下し，さらに粘土骨格の体積圧縮係数は粘土の巨視的弾性係数と同様な変化を示すことから，せん断による粘土地盤の粘性変形は圧密が進行するにつれ大きく減少するものと考えられる．

4. 対応原理を用いた圧密粘土の粘弾性 FEM 解析

弾性連続体の FEM(有限要素法)解析で用いられる要素剛性マトリックスは次式で与えられる [10]．

$$\left[k^{(e)}\right]=\int_V [B]^T[D][B]dV \tag{11}$$

ここに $[B]$ は要素形状に応じた勾配マトリックス，$[D]$ は要素材料マトリックスである．平面応力状態に対する材料マトリックスは

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)}\end{bmatrix} \tag{12}$$

で与えられ [10,11]，上式中の弾性係数 E とポアソン比 ν をせん断弾性係数 G と体積弾性係数 K を用いると

$$[D]=\begin{bmatrix}\frac{3K+4G}{3} & \frac{3K-2G}{3} & 0\\ \frac{3K-2G}{3} & \frac{3K+4G}{3} & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3K+4G & 3K-2G & 0\\ 3K-2G & 3K+4G & 0\\ 0 & 0 & 3G\end{bmatrix} \tag{13}$$

と表される．ここで材料定数 $1/G$ を対応原理により $\overline{P}/\overline{Q}$ に置き換え，Maxwell 体に対する粘弾性演算子

$$\frac{\{P\}}{\{Q\}}=\frac{\{\partial_t+1/\tau\}}{\{G\partial_t\}} \tag{14}$$

を用いて $1/G$ をラプラス変換すると

$$\frac{S+1/\tau}{GS^2}=\frac{1}{GS}+\frac{1}{G\tau S^2} \tag{15}$$

となる．この逆変換を行うと $1/G$ は

$$\frac{1}{G}+\frac{t}{G\tau}=\frac{1}{G}\left(1+\frac{t}{\tau}\right) \tag{16}$$

となる．よって弾性解析におけるせん断弾性係数 G を Maxwell 体に対しては

$$\frac{G}{(1+t/\tau)} \tag{17}$$

で置き換えることにより弾性平面応力問題を粘弾性平面応力問題へ変えることができる．平面ひずみ問題に対しても同様の操作により弾性平面ひずみ問題を粘弾性平面ひずみ問題に置き換えることができる．

Fig.11 は彫塑粘土のたわみ試験から得られた粘弾性定数を用い，80kPa で圧密された粘土梁のたわみを粘弾性 FEM により再現したものである．自重による弾性瞬間たわみに続いて，粘性たわみがゆっくりと進行していく様子がよく再現されている．Fig.12 は粘土梁たわみ試験結果と FE 解析結果を比較したもので，試験において初期の瞬間たわみから粘性たわみに移行する部分(遅延弾性応答)を除けば両者はよい一致を示している．

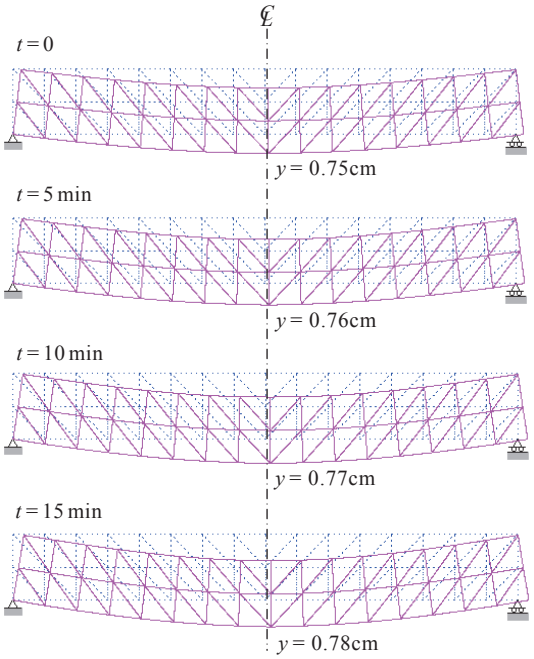

Fig. 11 Deflection of the clay-beam calculated by FEM.

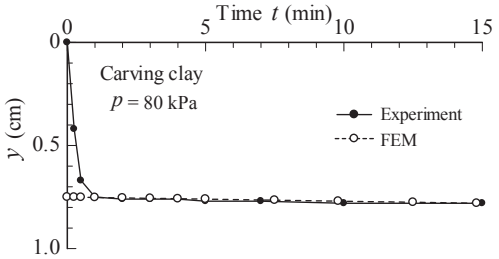

Fig. 12 Comparison of deflections measured experimentally and calculated by FEM.

最後に，Fig.1 に示した盛土が載荷された飽和粘土地盤の変形を粘弾性平面ひずみ問題として FEM 解析を行った．ここでは 80kPa で圧密された飽和海成粘土地盤を想定し，粘土梁のたわみ試験から得られた弾性係数と粘性係数を用いた．Fig.13 は盛土荷重載荷直後の瞬間弾性変形と時間とともに進行する粘性変形を示したもので，変形は 10 倍のスケールで表している．図から弾性瞬間変形に比べ粘性変形量の方が大きく，また粘性変形は 8 時間から 10 時間ほどで一定量に落ち着くことが示された。

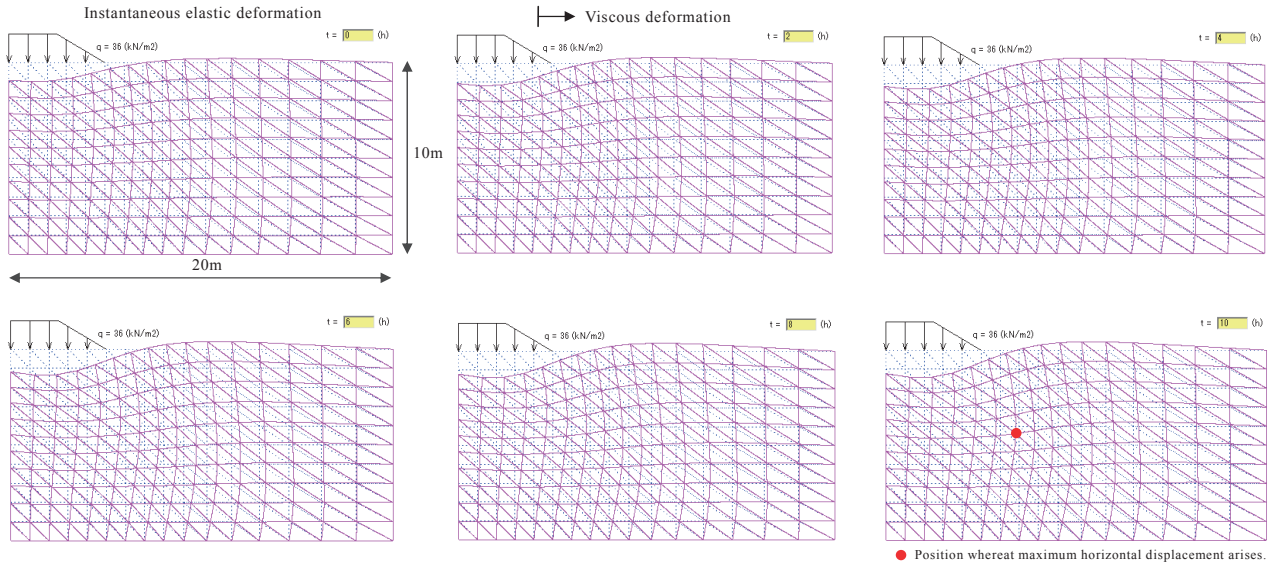

Fig. 13 Deformation of clay ground caused by fill loading calculated by FEM.

5. あとがき

本研究は，粘弾性力学における対応原理を利用し，飽和粘土の変形特性を表す弾性係数と粘性係数を粘土梁のたわみ試験から求める方法について検討し[3,12]，圧密圧力の強さによって粘土の粘弾性特性がどのように変化するのかを実験的に究明したものである．また，地盤のような連続体の変形解析に広く用いられる弾性 FE 解析に対応原理を適用することにより，弾性瞬間変形に引き続く粘性変形を合理的に解析できることを示した．本研究を通じて得られた知見を要約すると以下のとおりである．

1) 圧密粘土梁のたわみ試験より，載荷直後の瞬間たわみに続いて，時間に比例して増加する粘性たわみが測定される．瞬間たわみの大きさから圧密粘土の巨視的弾性係数(非排水変形係数)が，たわみの時間変化率から巨視的粘性係数が求められる．
2) 圧密試験による粘土骨格の体積圧縮係数とたわみ試験による粘土の巨視的弾性係数の逆数(圧縮率)は，圧密圧力の増加に対し同様な減少傾向を示す．粘土の巨視的粘性係数は，その対数が圧密圧力の対数に比例して増大する傾向を示す．また，圧密による粘土の粘性係数の増加率は弾性係数の増加率の約 2 倍の大きさを示した．
3) 連続体の変形解析に広く用いられる弾性 FE 解析の材料マトリックスに対応原理を適用することにより，二次元弾性問題を二次元粘弾性問題へと変えることができる．平面応力問題として圧密粘土梁のたわみ試験結果を粘弾性 FEM によって再現したところよい一致を確認した．

謝辞

本研究に係わる測定に協力を得た大学院の井野大星，村上文都両君に謝意を表します．

参考文献

1) 稲田倍穂: 軟弱地盤の調査から設計施工まで，鹿島出版会, pp.147-178 (1975).
2) 地盤工学会: 土質工学ハンドブック，第 5 章 土の圧縮と圧密, pp.159-162 (1982).
3) 横溝純一・村上文都・井野大星・本間重雄：粘土梁を用いた圧密粘土の弾性係数と粘性係数の測定，東海大学紀要工学部，Vol.54, No.2, pp.45-49(2014).
4) 酒井忠明: 構造力学，技報堂, pp.55-73 (1970).
5) 成岡昌夫・遠田良喜: 土木構造力学，市ヶ谷出版社, pp.71-87 (1991).
6) Y.C. Fung / 大橋義夫・村上澄男・神谷紀生共訳: 連続体の力学入門，培風館, pp.189-231 (1973).
7) G.E. Mase: Continuum Mechanics, Chapter9 Viscoelasticity, McGraw-Hill, pp.196-216 (1970).
8) Y.C.Fung: Foundations of Solid Mechanics,Prentice-Hall, pp.412-433 (1965).
9) 近藤次郎: ラプラス変換とその応用，培風館，pp.1-40 (1977).
10) L.J.Segerlind: Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., pp.232-239 (1976).
11) R.D.Cook: Concepts and Application of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., pp.88-91 (1974).
12) J.Yokomizo and S.Honma: Measurement of the modulus of elasticity and coefficient of viscosity of consolidated clay using clay beams, Proc. 5th Int. Conf. ICEAS, pp.446-457 (2015).