

# 非線形接触特性と粘弾性を考慮した紙の圧縮変形モデル

服部 泰久<sup>\*1</sup> 戸川 翔斗<sup>\*2</sup>

## A Compression Model of Paper Considering Nonlinear Contact Properties and Viscoelasticity

by

Yasuhisa HATTORI<sup>\*1</sup> and Shoto TOGAWA<sup>\*2</sup>

(Received on Mar. 31, 2016 and accepted on Jul. 7, 2016)

### Abstract

This paper proposes a new model of the compression of paper considering viscoelastic deformation properties as well as nonlinear contact properties. Nonlinearity is modeled as a contact model of rough surfaces in which asperities of surface roughness formed by entangled fibers are distributed in the direction perpendicular to the surface. Viscoelasticity is modeled as a 3-element viscoelastic solid model by which delayed elastic deformation can be represented. An identification method for the proposed model using experimental data measured under several loading ratios was introduced and applied to typical measured data to assess its validity. In addition, a sequence process of loading-unloading action was simulated to demonstrate that the proposed model can represent the compression behavior of paper properly.

**Keywords:** Paper, Compression, Viscoelasticity, Nonlinear problem, Surface roughness

## 1. 諸言

印刷機や抄紙機などの紙を扱う機械において、紙の搬送はほとんどの場合、機械部品と紙の接触によって発生する摩擦を利用して行われる。このような機械の高精度化や生産性向上を目的に、これまで多くの摩擦搬送解析が行われ、設計への利用を想定したシミュレーションが行われてきた。例えば、矢鍋らは、摩擦力の速度依存性を考慮して摩擦パッド式給紙機構や分離ローラ式給紙機構の FEM シミュレーションを行った<sup>1,2)</sup>。馬野・山浦は、ゴムローラによる紙の繰り出し機構の二次元接触解析を行い、紙・平板間の動摩擦係数のすべり速度依存性が搬送速度に大きく影響することを示した<sup>3,4)</sup>。

しかしながら、これらの解析では紙の摩擦の速度依存性に注目しながら、その原因には物理的な解釈を与えていない。摩擦モデルとしては、動摩擦係数がすべり速度を変数とするアークタンジェント型の関数で表される修正クーロン摩擦モデルが採用されているが<sup>1,2,4)</sup>、これが定量的に有効であるためには、実験結果との合わせ込みによるパラメータの調整を面圧などの条件ごとに行う必要がある。紙の搬送機器の開発コスト低減のためには、摩擦現象の物理的な理解のもとに、より広い状況に適用可能な摩擦モデルの構築が求められる。

一方、紙の摩擦特性にはその圧縮変形特性が大きく影

響していると考えられる。橋本らは、紙の表面粗さの考慮のもとに厚さ方向弾性変形を扱った接触モデルと混合潤滑理論を組み合わせ、高すべり速度までの摩擦予測モデルを提案したが<sup>5)</sup>、低速度領域での摩擦係数のすべり速度依存性については未解決のままであった<sup>6)</sup>。

ところで、摩擦係数がすべり速度にもなって増加する性質はゴムなどのエラストマーに一般的に見られる性質であり、粘弾性特性の現れと理解されている<sup>7)</sup>。この知見を取り入れれば、低速度領域での摩擦係数のすべり速度依存性を説明できる紙の摩擦モデルが構築できる見込みがある。

そこで、紙の摩擦モデルへの適用をねらいとして、その第一段階として、圧縮変形挙動を粘弾性モデルで表現した紙の接触モデルの確立を目的とする。筆者は、すでにステップ荷重による圧縮試験によって粘弾性モデルを同定する方法を示したが<sup>8)</sup>、接触の非線形性のため面圧ごとにモデルを同定する必要があった。本論文では、非線形接触特性と粘弾性を同時に考慮可能な同定方法を導入することによって、荷重および負荷速度の広範囲にわたって紙の圧縮変形挙動を表現できるモデルを提示する。

## 2. 圧縮変形特性の測定

### 2.1 試料および実験装置

本論文では、厚さ約 70 $\mu$ m の未使用の新聞印刷用紙を考察の対象とする。

\*1 工学部機械工学科准教授

\*2 工学研究科機械工学専攻修士課程

実験装置 (Fig. 1) は、試料を圧縮しその変形量の時間変化を測定するものである。水平なステージに試料となる紙片1枚を置き、上部より直径 10mm の円形平面の圧子押し付ける。圧子はステージに対して垂直方向のみ自由度を持つように支持されており、試料を平行に圧縮することができる。また、球面座により姿勢を微調整できるようになっており、片当たりのない状態で永電磁チャックに吸着することで、接触面内で均一な圧縮状態を保つことができる。試料への荷重は、圧子を取り付けた可動部を電磁石 (図示略) で下方へ吸引することで負荷するようになっており、ロードセルで荷重をモニターしながら電流をコントロールすることで任意のパターンで与えることができる。試料の変形は、ステージに組み込んだ光ファイバー変位計によって、圧子の垂直変位を測定することによって知ることができる。

### 2.2 実験方法および実験条件

この実験装置を用いて、Fig. 2 のような直線状に増加するパターンの所要時間を Table 1 のように変化させて、様々な負荷速度により試料に荷重を与える。ただし、実際には、負荷開始時の接触状態の不安定を避けるために、試料にはあらかじめ最小限の荷重 0.1N (1.3kPa) をかけておく。また、繰り返し測定を行う際には、以前の負荷履歴の影響を排除するために、各測定に先立って、600s 間最大荷重を負荷した後、600s 間無負荷状態に置く。これは、既報<sup>8)</sup>において観察された塑性変形 (初回の負荷によって除荷後に残留する変形) を完了させる役割にもなっている。

### 2.3 測定結果

Fig. 3 に、典型的な測定例について、荷重増加の所要時間ごとの荷重と変形量の関係を示す。各条件において、荷重が増加するほど変形量の増加が緩やかになっているのがわかる。また、変形量の最大値は、所要時間 500s

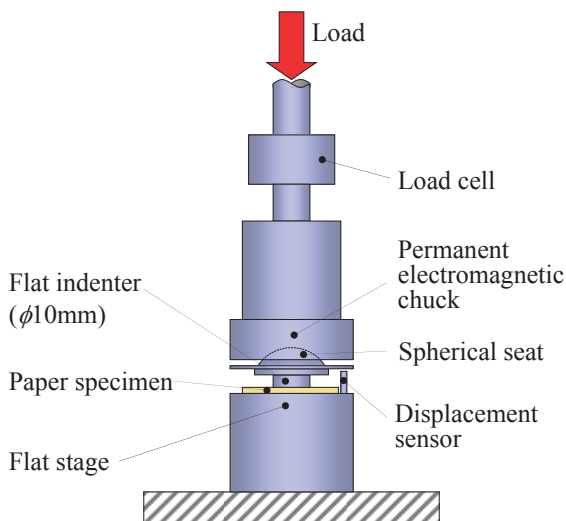


Fig. 1 Experimental apparatus

のとき最も大きく、所要時間が短くなるほど小さくなっている。これより、紙の圧縮変形の検討には、非線形特性と粘弾性の考慮が不可欠であることがわかる。

## 3. 圧縮変形モデル

### 3.1 モデルの構築とパラメータの同定

紙の表面には繊維の絡み合いによる粗さが構成されており、接触の非線形性はその粗さ突起が厚さ方向に分布することによって起こるものとして、Fig. 4 のような圧縮変形モデルを考える。突起の変位は高さ方向のみに起こり、互いに干渉しないものとする。材料全体の変形は遅延変形を表すことができる 3 要素の粘弾性固体モデルで表し、各突起が同一の特徴を持つとする。なお、紙の繊維自体の圧縮は全体の変形に対してごくわずかであるので、ここでは突起頂点形状の変形は考えない。

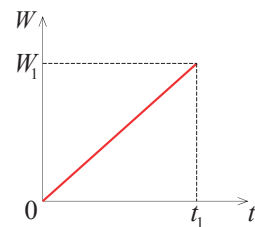


Fig. 2 Loading pattern.

Table 1 Experimental conditions.

Load amplitude $W_1$ [N] (Contact pressure amplitude $p_1$ [kPa])	20 (255)
Loading time $t_1$ [s] (Loading rate $\dot{p}$ [kPa/s])	0.1, 0.5, 5, 50, 500 (2550, 510, 5.1, 0.51, 0.051)

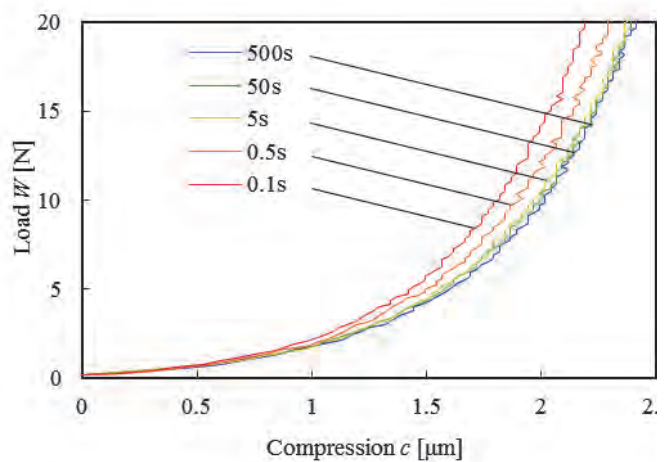


Fig. 3 Relation between load and compression for several loading time conditions.

最も高い突起頂点の位置を基準として、突起頂点の深さを  $d_s$ 、その分布の確率密度関数を  $\phi(d_s)$  とすると、平面による圧縮が準静的である場合には、圧縮変形量  $c$  に対する接触荷重  $W_s$  は期待値として次のように表される。

$$W_s(c) = \frac{gA}{T} \int_0^c (c - d_s) \phi(d_s) dd_s \quad (1)$$

ここで、 $A$  は見かけの接触面積、 $T$  は試料の厚さである。

$g$  は材料全体の準静的な弾性率であり、瞬間弾性率  $g_1$ 、遅延弾性率  $g_2$ 、遅延粘性率  $\eta_2$  と次の関係にある。

$$g = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2} \quad (2)$$

これは、最大変形時 ( $c = c_1$ ) に全ての突起が接触しているとみなすと、測定された  $W_s - c$  曲線の勾配から次のように決定される。

$$g = \frac{T}{A} \left. \frac{dW_s}{dc} \right|_{c=c_1} \quad (3)$$

また、式(1)より、任意の確率密度関数  $\phi(d_s)$  に対して次式が成り立ち、 $\phi(c)$  は  $W_s(c)$  の 2 階導関数と同じ形となる。

$$\phi(c) = \frac{T}{gA} \frac{d^2 W_s}{dc^2} \quad (4)$$

突起頂点は表面から深くなるにつれて増加し、変形を考察する有限の範囲においては単調増加と考えて差支えないので、その確率密度関数  $\phi(d_s)$  には最大変形量  $c_1$  までの範囲で次のような指数関数分布を採用する。

$$\phi(d_s) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{d_s - c_1}{\sigma}} \quad (5)$$

$\sigma$  はこの指数関数分布の標準偏差である。式(4)に式(5)を適用し、未変形時、最大変形時に荷重がそれぞれ 0,  $W_1$  であることを考慮すると、準静的圧縮による荷重  $W_s$  は次のように表される。

$$W_s(c) = \frac{gA}{T} e^{-\frac{c_1}{\sigma}} \left\{ (e^{\frac{c}{\sigma}} - 1) - \frac{c}{c_1} (e^{\frac{c_1}{\sigma}} - 1) \right\} + \frac{c}{c_1} W_1 \quad (6)$$

これを準静的な条件の測定結果に当てはめると、表面粗さのパラメータ  $\sigma$  を決定できる。

圧縮が動的である場合には、接触荷重は圧縮変形の速度にも依存する。3 要素粘弾性固体に大きさ 1 のステップ状のひずみの変化  $1(t)$  を与えたときの応力の応答は、

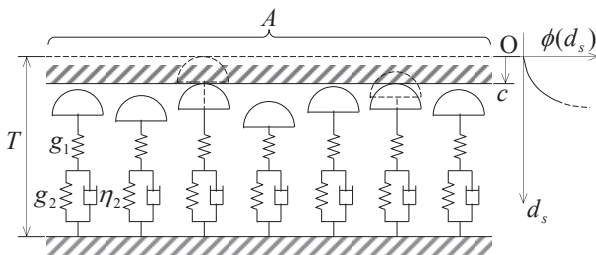


Fig. 4 3-element viscoelastic solid model considering nonlinear contact properties.

緩和弾性率  $Y(t)$  として次式で与えられる。

$$Y(t) = \frac{g}{g_1 + g_2} \left\{ g_2 + g_1 \exp\left(-\frac{g_1 + g_2}{\eta_2} t\right) \right\} \quad (7)$$

したがって、圧縮変形量の変化  $c(t)$  に対する接触荷重の変化  $W_d(t)$  は、深さ  $d_s$  の突起に作用する圧力が緩和弾性率  $Y(t)$  とひずみ速度  $\dot{c}(t)/T$  の積の履歴積分で表されることから、期待値として次のように計算される。

$$W_d(t) = A \int_0^{c(t)} \left\{ \int_{t_{cont}(d_s)}^t Y(t-t') \frac{\dot{c}(t')}{T} dt' \right\} \phi(d_s) dd_s \quad (8)$$

ここで、 $t_{cont}(d_s)$  は深さ  $d_s$  にある突起に接触が開始する時刻で、 $c(t) = d_s$  の条件から決まるものである。式(8)を動的な条件の測定結果に当てはめると、粘弾性パラメータ  $g_1$ 、 $g_2$ 、 $\eta_2$  を決定することができる。

### 3.2 計算結果

Fig. 3 の測定例に対して、圧縮変形モデルを特徴づけるパラメータの同定計算を行った。まず、所要時間 500s の場合は、測定時間が十分長く変化は準静的であったとみなせるため、準静的条件のデータとして取り扱い、式(2)、(5)の当てはめより、準静的弾性率  $g$  と突起深さ分布の標準偏差  $\sigma$  を求めた。次に、すべての所要時間の場合を動的条件のデータとして扱い、式(8)の当てはめから遅延弾性率  $g_2$  と遅延粘性率  $\eta_2$  を求めた。瞬間弾性率  $g_1$  は、以上の結果と式(2)の関係から算出した。なお、準静的条件の当てはめ計算には Marquart 法を、動的条件の当てはめ計算には DFP 法を用い、式(8)中の積分は数値積分した。

Fig. 5 に準静的条件データへの曲線の当てはめ計算の結果を示す。荷重  $W_s$ 、弾性率  $g$ 、確率密度関数  $\phi$  と、変形量  $c$  の全域でよく当てはまっており、表面粗さの突起深さ分布に採用した指数関数が適切であったことが分かる。

Fig. 6 に動的条件データへの曲線の当てはめ計算の結果を示す。個々の測定データに対しては必ずしも最適な当てはめでないものもあるが、すべての負荷時間の測定データに対して平均的に曲線の当てはめが行われており、負荷時間の変形量への影響を 3 要素粘弾性固体モデルで表現したことの妥当性が認められる。

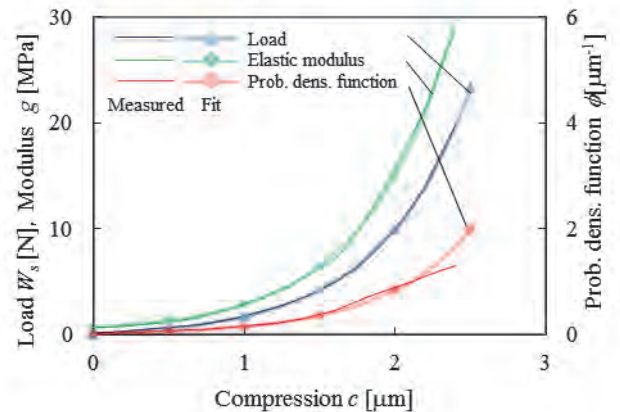


Fig. 5 Curve fitting to measured data (Quasi-static condition).

Table 2 に当てはめによって決定されたモデルのパラメータと関連する諸量を、上の測定例に対する結果と、5回の測定データに対する結果の統計値を合わせて示す。

粗さ突起の深さ分布に関して、標準偏差  $\sigma$  のばらつきは比較的小さく、最大深さ  $c_1$  の4分の1程度の値を取っている。これは、表面から最大深さまでの範囲に98%程度の突起が存在していることを表しており、指数関数分布の仮定がよく当てはまっていたことを示している。

粘弾性パラメータに関しては、瞬間弾性率  $g_1$  と遅延弾性率  $g_2$  は30%程度のばらつきの範囲で求まっており、弾性率比  $g_2/g_1$  は3程度の値である。これは遅延弾性部分が瞬間弾性部分の3分の1程度と無視できない大きさであることを示している。この結果は、表面から浅い部分で起こる大きな瞬間変形を、表面粗さの突起深さ分布

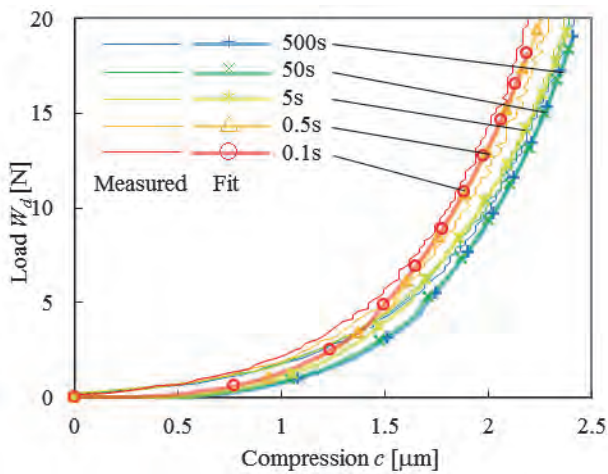


Fig. 6 Curve fitting to measured data (Dynamic condition).

Table 2 Model parameters determined by curve fitting.

Parameter	Present	5 times		
		Ave.	Max.	Min.
Prob. dens. function of roughness summit depth				
Max. of depth $c_1$ [μm]	2.413	2.931	3.459 (+18.0%)	2.413 (-17.7%)
Standard deviation $\sigma$ [μm]	0.5847	0.8313	1.593 (+91.6%)	0.5081 (-38.9%)
Max. of prob. dens. $1/\sigma$ [μm <sup>-1</sup> ]	0.8550	0.7034	0.9839 (+39.9%)	0.3139 (-55.4%)
Viscoelastic properties				
Quasi-static elastic modulus $g$ [MPa]	30.07	25.31	31.62 (+25.4%)	17.74 (-29.9%)
Instantaneous elastic modulus $g_1$ [MPa]	45.20	35.47	49.16 (+38.9%)	23.76 (-33.0%)
Delayed elastic modulus $g_2$ [MPa]	89.75	102.2	165.5 (+61.9%)	70.02 (-31.5%)
Ratio between elastic moduli $g_2/g_1$ [I]	1.986	3.215	6.454 (+100%)	1.803 (-43.9%)
Delayed viscous modulus $\eta_2$ [MPa·s]	119.9	2794	7738 (+177%)	8.113 (-99.7%)
Delayed time $\eta_2/g_2$ [s]	1.336	23.26	59.22 (+155%)	0.1159 (-99.5%)

が表現し得たことで、純粋に素地の変形特性が取り出されたものと考えられる。一方、遅延粘性率  $\eta_2$  のばらつきは非常に大きく、遅延時間  $\eta_2/g_2$  も2桁以上にわたってしまっている。これは、今回当てはめに使用したデータを得る測定方法では、遅延粘性率の影響が変化として表れにくく、測定誤差などに埋もれがちであったために、当てはめ計算において精度よく値を得ることが出来なかったと思われる。

なお、本計算例は厚さ約70μmの未使用の新聞印刷用紙を対象としたものであったが、荷重  $W_s$  が変形量  $c$  の指数関数と一次関数の和で表される式(5)のような関係であれば、別の種類の紙や異なる状況(使用歴等)であっても本モデルは適用可能と思われる。その場合、当てはめにより得られたパラメータが状態の違いを表す指標になり得る。

#### 4. 圧縮変形モデルの検証

##### 4.1 シミュレーション方法

提案する圧縮変形モデルと同定されたパラメータの適切性を検証するために、様々な荷重パターンによる圧縮変形挙動をモデルによりシミュレーションする。ここでは、紙の摩擦搬送によくみられる負荷・除荷が連続する過程を想定する。

Fig. 7 に示すような直線状に増加した後、直線状に減少する荷重パターンで紙試料を圧縮し、変形挙動を測定する。測定条件はTable 1のとおりで、様々な負荷速度で荷重変化を与える。前半部分はモデルのパラメータ同定のための実験と共通であるが、引き続き同じ所要時間で無負荷の状態まで除荷する。

シミュレーションは測定された変形量データを用いて動的条件の場合の荷重の式(8)を計算することで行い、荷重パターンが再現できるかどうかを評価する。ただし、除荷過程においては、深さ  $d_s$  の突起に作用する圧力  $p(d_s, t)$  は変形の遅延のため負荷過程と対称にはならない。積分値が0となる時刻以降 ( $p(d_s, t) < 0$  と計算される) は接触が解消されていると考えられ、 $p(d_s, t) = 0$  と置き直す必要がある。また、突起深さについての積分の上限は最大深さ  $c_1$  となる。以上より、除荷過程についての計算は次の式(8')のように表される。

$$W_d(t) = A \int_0^{c_1} p(d_s, t) \phi(d_s) dd_s \quad (8')$$

ただし  $p(d_s, t) = \max\left(\int_{c_{cont}(d_s)}^t Y(t-t') \frac{\dot{c}(t')}{T} dt', 0\right)$

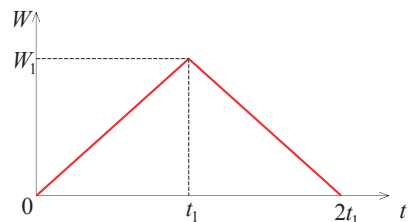


Fig. 7 Loading pattern for verification.

4.2 シミュレーション結果

Fig.8 は各所要時間の負荷／除荷に対する測定結果とモデルによるシミュレーション結果を描いたものである。

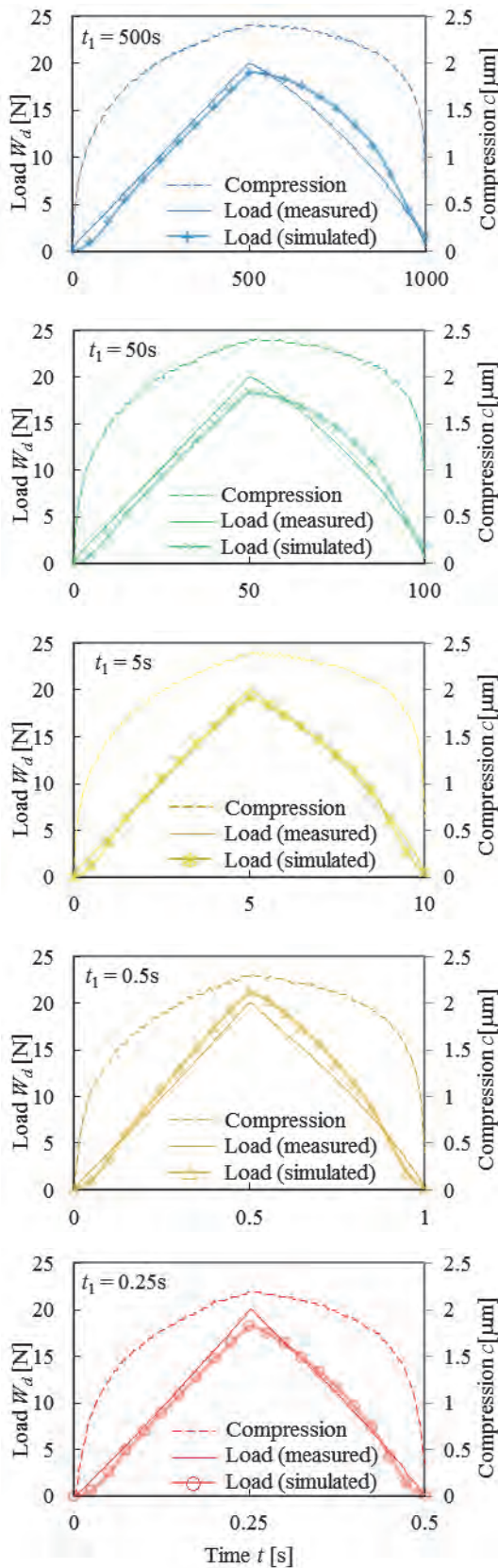


Fig. 8 Measured data and simulated results.

どの所要時間についてもシミュレーション結果は測定結果に概ねよく一致しており、提案するモデルと同定されたパラメータで、広い負荷速度の範囲で紙の圧縮変形挙動を表現できていることが分かる。ただし、所要時間の長い500sと50sの場合のシミュレーション結果には、除荷時に荷重の減少が遅れ、最終的に0に戻らない傾向が見られた。これは、これらの条件では変形量の回復が著しく緩慢であり、除荷終了後も残留変形量が大きかったことが影響していると思われる。この部分には塑性変形に近いような3要素粘弾性固体モデルで表現しきれない変形が含まれていた可能性があり、シミュレーションの精度を上げるためには、塑性変形を排除するように実験条件の整備をするか、塑性変形を考慮できるモデルの拡張が必要だと考えられる。

5. 結言

非線形接触特性と粘弾性を考慮することによって、荷重および負荷速度の広範囲にわたって紙の圧縮挙動を表現できるモデルを提案し、測定結果によってそのモデルのパラメータを同定する方法を示した。これを典型的な測定例に適用することによってモデルの妥当性を確認し、さらに連続する負荷・除荷過程をシミュレーションすることによって圧縮変形挙動を再現できることを示した。

参考文献

- 1) 矢鍋重夫・細川勇平・前田貴之・横山才二：分離ローラ式給紙機構のFEMシミュレーション，日本機械学会論文集(C編)，Vol. 69, No. 683, pp. 1791-1797 (2003).
- 2) 矢鍋重夫・藤井和成・大浜靖士，摩擦パッドを持つ給紙機構のFEMシミュレーション，日本機械学会論文集(C編)，Vol. 68, No. 676, pp. 3471-3478 (2002).
- 3) 馬野寛士，山浦弘：ゴムローラによる紙の繰り出しに関する研究，日本機械学会論文集(C編)，Vol. 75, No. 755, pp. 2476-2485, pp. 1965-1973 (2009).
- 4) 馬野寛士，山浦弘：ゴムローラによる紙の繰り出しの速度依存性に関する研究，日本機械学会論文集(C編)，Vol. 77, No. 778, pp. 2476-2485 (2011).
- 5) 橋本巨，佐々木将志：ペーパーウェブと鋼ローラ間の接触力学に基づくトラクション予測モデル(第1報，理論モデルの提案とその実験的検証)，日本機械学会論文集(C編)，Vol. 73, No. 726, pp. 602-610 (2007).
- 6) 服部泰久，橋本巨，川西博人，平野貴哉：紙-鋼間の低速度摩擦特性，トライボロジー会議予稿集(東京2007-5)，pp. 107-108 (2007).
- 7) D. F. Moore, The Friction and Lubrication of Elastomers, Pergamon Press (1975).
- 8) 服部泰久：紙の圧縮変形挙動とそのモデル化，日本機械学会2008年度年次大会講演論文集(4)，pp. 111-112 (2008).