東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.2,2016,pp.37-42

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 7）
～群の同型～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.7
~Group Isomorphism~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 22, 2016 & accepted on Dec. 21, 2016)

あらまし

大学初年次で学ぶ群の概念は、多くの初学者にとっては敷居の高いものである．原因の一つはその抽象度の高さもあるのではないかと考える．この論文では群の同型の概念について取り上げることにする．定義について学んだだけでは理解が難しいものであるが、具体的な例を扱うことが理解の手助けとなりうる．そのとき乗積表の作成が有効であることを示したい．また、群準同型写像の例に触れる．

Abstract

The concepts of group isomorphism in group theory strike freshmen as difficult by reason of high degree of its abstraction. So we give several concrete examples of group isomorphism.

キーワード: 群，準同型，同型，トーラス群
Keywords: *Group, Homomorphism, Isomorphism, Torus Group*

1．はじめに

集合 G を演算 $\bullet$ が定義された群とし，集合 G' を演算 $\circ$ が定義された群とする．写像 $\varphi: G \to G'$ が次の条件

$$\varphi(x \bullet y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) \qquad x, y \in G$$

を満たすとき，φ を群準同型という．特に群準同型 φ が全単射であるとき、φ を群同型と呼び、群 G と G' は同型であるといい、$G \cong G'$ と表す．

また，次の定理は基本的である．

定理（準同型定理）

G, G' は群であり，$\varphi: G \to G'$ を群準同型とする．このとき

$$G / Ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$

が成り立つ．特に φ が全射であるならば

$$G / Ker\varphi \cong G'$$

となる．

本論文では，まず位数 6 の群の例を 5 つ挙げる．それぞれの群の乗積表を比較することにより，有限群が同型であるということのイメージを掴むこととする．また，群準同型と準同型定理についても確かなイメージを持つことが肝要であるので、トーラス群にまつわる例を挙げて詳しく解説することとしたい．抽象度の高い概念を理解することは初学者にとって難しく感じることであろうが，具体的な例に触れることにより，実感が理解へとつながるのではないかと思う．

*1 高輪教養教育センター　准教授
Liberal Arts Education Center,Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 位数 6 の群の乗積表

この章では，位数 6 の群の乗積表を可換群と非可換群を織り交ぜて紹介する[1)2)3)]．

例 1　G_1 を整数を法 6 に関する合同のよって分けた剰余類の集合 $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ の加法群とする．これを

$$G_1=\left\{\overline{0},\,\overline{1},\,\overline{2},\,\overline{3},\,\overline{4},\,\overline{5}\right\}$$

と表す．

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

例 2　G_2 を 1 の 6 乗根の全体からなる乗法群とする．これを

$$G_2=\left\{1,\,\varsigma\ \varsigma^2,\,\varsigma^3,\,\varsigma^4,\,\varsigma^5\right\}\qquad \text{ただし、}\varsigma\text{は1の原始6乗根とする．}$$

と表す．

	1	ς	ς^2	ς^3	ς^4	ς^5
1	1	ς	ς^2	ς^3	ς^4	ς^5
ς	ς	ς^2	ς^3	ς^4	ς^5	1
ς^2	ς^2	ς^3	ς^4	ς^5	1	ς
ς^3	ς^3	ς^4	ς^5	1	ς	ς^2
ς^4	ς^4	ς^5	1	ς	ς^2	ς^3
ς^5	ς^5	1	ς	ς^2	ς^3	ς^4

例 3　G_3 を 3 次対称群 S_3 とする．これを

$$G_3=\left\{e,\,(1,\,2),\,(1,\,3),\,(2,\,3),\,(1,\,2,\,3),\,(1,\,3,\,2)\right\}$$

と表す．

	e	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
e	e	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
$(1, 2)$	$(1, 2)$	e	$(1, 3, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 3)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 2, 3)$	e	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$
$(2, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2, 3)$	e	$(1, 3)$	$(1, 2)$
$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 2)$	$(1, 3, 2)$	e
$(1, 3, 2)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	e	$(1, 2, 3)$

例 4　G_4を次の$\mathbf{C}-\{0, 1\}$から$\mathbf{C}-\{0, 1\}$への分数一次変換

$$f_1(z)=z,\ f_2(z)=1-z,\ f_3(z)=\frac{1}{z},\ f_4(z)=\frac{z}{z-1},\ f_5(z)=\frac{1}{1-z},\ f_6(z)=\frac{z-1}{z}$$

は，写像の合成を積として群をなす．これを

$$G_4=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

と表す．

	z	$1-z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{z-1}{z}$
z	z	$1-z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{z-1}{z}$
$1-z$	$1-z$	z	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z}$
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{1-z}$	z	$\frac{z-1}{z}$	$1-z$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{1}{1-z}$	z	$\frac{1}{z}$	$1-z$
$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$1-z$	$\frac{z-1}{z}$	z
$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$1-z$	$\frac{1}{z}$	z	$\frac{1}{1-z}$

例 5　$G_5=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$は行列の乗法について群をなす．

	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

さて，G_1においていて

$$\overline{0}=c_0,\ \overline{1}=c_1,\ \overline{2}=c_2,\ \overline{3}=c_3,\ \overline{4}=c_4,\ \overline{5}=c_5,$$

また、G_2において

$$1=\varsigma^0=c_0,\ \varsigma=\varsigma^1=c_1,\ \varsigma^2=c_2,\ \varsigma^3=c_3,\ \varsigma^4=c_4,\ \varsigma^5=c_5$$

と置き換えることにすれば，乗積表はどちらも全く同じ

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_0	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_0
c_2	c_2	c_3	c_4	c_5	c_0	c_1
c_3	c_3	c_4	c_5	c_0	c_1	c_2
c_4	c_4	c_5	c_0	c_1	c_2	c_3
c_5	c_5	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4

となることから，2 つの群 G_1 と G_2 は同型であることがわかる．

さらに，G_3 において

$$e = s_1,\ (1,\ 2) = s_2,\ (1,\ 3) = s_3,\ (2,\ 3) = s_4,\ (1,\ 2,\ 3) = s_5,\ (1,\ 3,\ 2) = s_6$$

G_4 において

$$z = s_1,\ 1 - z = s_2,\ \frac{1}{z} = s_3,\ \frac{z}{z-1} = s_4,\ \frac{1}{1-z} = s_5,\ \frac{z-1}{z} = s_6$$

G_5 において

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = s_1,\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = s_2,\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = s_3,\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = s_4,\ \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = s_5,\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = s_6$$

と置き換えることにすれば，乗積表は 3 つとも全く同じ

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_1	s_6	s_5	s_4	s_3
s_3	s_3	s_5	s_1	s_6	s_2	s_4
s_4	s_4	s_6	s_5	s_1	s_3	s_2
s_5	s_5	s_3	s_4	s_2	s_6	s_1
s_6	s_6	s_4	s_2	s_3	s_1	s_5

となることから，3 つの群 G_3，G_4，G_5 はすべて同型であることがわかる．

3．群準同型の例

この章では、群準同型の例を紹介するが、取り扱う群は 1 次元トーラス群 $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ と 2 次特殊直交群（回転群）$SO(2) = \{A \in M(n,\ \mathbf{R}); A^t A = {}^t AA = E,\ \det A = 1\}$ とする [4]．

まず，実数の加法群 $\mathbf{R}$ からトーラス群 $\mathbf{T}$ への写像 φ を $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ と定義すると

$$\varphi(x+y) = e^{2\pi i (x+y)} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} = \varphi(x)\varphi(y)$$

が成り立つことから、準同型であることがわかる．また，φ は全射であり $Ker\varphi = \mathbf{Z}$（整数の加法群）である．したがって，準同型定理より次の群同型

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{T}$$

が得られる．

さらに， $A\in SO(2)$ は $A{}^tA={}^tAA=E, \left|A\right|=1$ を満たす２次行列であることから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (\theta\in\mathbf{R})$$

の形をしていることが知られている．

そこで， $SO(2)$ から $\mathbf{T}$ への写像 f を $f\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=e^{i\theta}$ と定義すると

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\right)\\
&= e^{i(\alpha+\beta)}\\
&= e^{i\alpha}e^{i\beta}\\
&= f\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\right)f\left(\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので、群準同型であることがわかる．

4. おわりに

まず，実数の加法群を $\mathbf{R}$，実数の全体から０を除いた乗法群を $\mathbf{R}^*$，正の実数の乗法群を $\mathbf{R}^+$， n 次一般線形群を $GL(n,\mathbf{R})=\left\{A\in M(n,\mathbf{R});\left|A\right|\neq 0\right\}$ と表すことにする．

実は群論を学ぶ前に，高校数学および線形代数においてすでに群準同型についても触れているのである．例えば，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^+$ への写像 $f(x)=e^x$，$\mathbf{R}^+$ から $\mathbf{R}$ への写像 $g(x)=\log x$，$GL(n,\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^*$ への写像 $h(A)=\left|A\right|$ が群準同型であることは，よく知られている以下の公式

$$\begin{aligned}
&e^{x+y}=e^xe^y && (x,\ y\in\mathbf{R}),\\
&\log xy=\log x+\log y && (x,\ y\in\mathbf{R}^+),\\
&\left|AB\right|=\left|A\right|\left|B\right| && (A,\ B\in M(n,\mathbf{R}))
\end{aligned}$$

から確かめられる．

参考文献

1） 服部昭「群とその表現」共立出版，1967
2） 岩永恭雄「代数学の基礎」日本評論社，2002
3） 横田一郎「初めて学ぶ人のための群論入門」現代数学社，1997
4） 横井英夫，硲野敏博共著「代数演習」サイエンス社，1989