東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.57-64

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 15）
～ディィリクレ積分～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.15
~ Dirichlet Integrals ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 28, 2017 & accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

ディリクレ積分と呼ばれるn重積分は，ディリクレ分布という多次元確率分布の正規化定数を求めることに使われる．本論文では，このディリクレ積分の値の計算について詳しく述べる．

Abstract

We use multiple integrals called Dirichlet integrals to calculate normalized constants of multiple probability distributions called Dirichlet distributions. In this paper, we give detailed calculus for the values of Dirichlet integrals.

キーワード：ディリクレ積分，ベータ関数，ガンマ関数
Keywords: *Dirichlet Integral, Beta Function, Gamma Function*

1. はじめに

本論文では，ディリクレ積分と呼ばれる次の n 重積分

$$\iint\cdots\int_K x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\left(1-x_1-x_2-\cdots-x_n\right)^{q-1}dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(q)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)}$$

ただし，$K=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\,;x_1>0,\,x_2>0,\cdots,x_n>0,\,x_1+x_2+\cdots+x_n<1\right\}$

の計算方法について述べる．

まず準備として，ベータ関数とガンマ関数の定義，およびこの 2 つの関数の間に成り立つ関係式についての解説を行う．

ベータ関数

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\quad(p>0,\,q>0)$$

とガンマ関数

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\quad(s>0)$$

は共に絶対収束することが知られており，次の関係式が成り立つ．

---

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor

補助定理 [1)]

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

（証明）

xy 平面の第 1 象限 $(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ を積分区間 K として

$$S=\iint_K e^{-x-y}\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dxdy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dxdy \qquad (p>0,\ q>0)$$

を考える．これは広義積分であるが，その値は

$$S=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx\cdot\int_0^\infty e^{-y}\,y^{q-1}\,dy=\Gamma(p)\Gamma(q)\cdots\cdots①$$

に等しい．一方，次の変数変換

$$x+y=u,\quad x=uv\cdots\cdots(*)$$

によって，S を uv 系に直してみる．$(*)$ から

$$u=x+y,\quad v=\frac{x}{x+y}$$

であり，逆に

$$x=uv,\quad y=u-uv=u(1-v)$$

が成り立つ．ここで，$u=x+y,\quad v=\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}$ であることから，u,v の変域は $0<u<\infty,\ 0<v<1$ であることがわかる．

したがって，xy 平面の第 1 象限 $(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ と uv 平面の $\{(u,v)\in R^2\,;0<u<\infty,\ 0<v<1\}$ との間に 1 対 1 対応が成り立っていることがわかる．また，関数行列式（ヤコビアン）は

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix}=-u$$

であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{u=0}^\infty\int_{v=0}^1 e^{-u}\,(uv)^{p-1}\,\{u(1-v)\}^{q-1}\,|-u|\,dudv\\&=\int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du\cdot\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\\&=\Gamma(p+q)B(p,q)\cdots\cdots②\end{aligned}$$

なので，①と②を比較して

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)$$

から

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が得られる．

【証明終】

2. ディリクレ積分の例

この章では，ディリクレ積分の $n=2,3$ の場合についての計算をおこなう．

例1

2次元の積分領域を $K=\{(x,y)\in R^2; x>0, y>0, x+y<1\}$ として次の重積分

$$I=\iint_K x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,dxdy \qquad (\text{ただし，} p>0, q>0, r>0)$$

を求めることとする．

$$x+y=u,\quad y=uv\cdots\cdots(*)$$

とおいて，uv 系に変換してみる．すると $(*)$ は

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x+y}$$

または逆に

$$x=u-uv=u(1-v),\quad y=uv$$

と変形することができる．

したがって，xy 平面上の K と uv 平面上の $K'=\{(u,v)\in R^2; 0<u<1, 0<v<1\}$ との間に1対1の対応が成り立っていることがわかる．今，関数行列式（ヤコビアン）は

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix}=u$$

である．

よって

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{K'}\{u(1-v)\}^{p-1}(uv)^{q-1}(1-u)^{r-1}|u|\,dudv\\
&=\int_0^1 u^{p+q-1}(1-u)^{r-1}\,du\cdot\int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}\,dv\\
&=B(p+q,r)B(q,p)\\
&=\frac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}\\
&=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}
\end{aligned}$$

が得られる．

例 2[1)]

3 次元の積分領域を $K=\left\{\left(x,\,y,\,z\right)\in R^3\,;x>0,\,y>0,\,z>0,\,x+y+z<1\right\}$として次の3重積分

$$I=\iiint_K x^{p-1}\,y^{q-1}\,z^{r-1}\left(1-x-y-z\right)^{s-1}dxdydz \qquad \left(\text{ただし，}p>0,\,q>0,\,r>0,\,s>0\right)$$

を求めることとする．

$$x+y+z=u,\quad y+z=uv,\quad z=uvw\cdots\cdots(*)$$

とおいて，uv 系に変換してみる．すると$(*)$は

$$u=x+y+z,\quad v=\frac{y+z}{x+y+z},\quad w=\frac{z}{y+z}$$

または逆に

$$x=u-uv=u\left(1-v\right),\quad y=uv-uvw=uv\left(1-w\right),\quad z=uvw$$

と変形することができる．

したがって，xyz 系の四面体 K と uvw 系の立方体 $K'=\left\{\left(u,\,v,\,w\right)\in R^3\,;0<u<1,\,0<v<1,\,0<w<1\right\}$との間に 1 対 1 の対応が成り立っていることがわかる．今，関数行列式（ヤコビアン）$\dfrac{D\left(x,\,y,\,z\right)}{D\left(u,\,v,\,w\right)}$ を計算するために，仲介の変数として

$$\alpha=u,\quad \beta=uv,\quad \gamma=uvw$$

を取ることにすれば

$$x=\alpha-\beta,\quad y=\beta-\gamma,\quad z=\gamma$$

である．このことから

$$\begin{aligned}\frac{D\left(x,\,y,\,z\right)}{D\left(u,\,v,\,w\right)}&=\frac{D\left(x,\,y,\,z\right)}{D\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right)}\frac{D\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right)}{D\left(u,\,v,\,w\right)}\\&=\begin{vmatrix}x_\alpha & x_\beta & x_\gamma\\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma\\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_u & \alpha_v & \alpha_w\\ \beta_u & \beta_v & \beta_w\\ \gamma_u & \gamma_v & \gamma_w\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ v & u & 0\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}\\&=u^2\,v\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{K'} \{u(1-v)\}^{p-1} \{uv(1-w)\}^{q-1} (uvw)^{r-1} (1-u)^{s-1} \left|u^2 v\right| dudvdw \\
&= \int_0^1 u^{p+q+r-1}(1-u)^{s-1} du \cdot \int_0^1 v^{q+r-1}(1-v)^{p-1} dv \cdot \int_0^1 w^{r-1}(1-w)^{q-1} dw \\
&= \mathrm{B}(p+q+r, s)\mathrm{B}(q+r, p)\mathrm{B}(r, q) \\
&= \frac{\Gamma(p+q+r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)} \cdot \frac{\Gamma(q+r)\Gamma(p)}{\Gamma(q+r+p)} \cdot \frac{\Gamma(r)\Gamma(q)}{\Gamma(r+q)} \\
&= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}
\end{aligned}
$$

が得られる.

3. ディリクレ積分

この章においては，一般の n 重積分の場合についての証明をおこなう.

定理（ディリクレ積分）[2)]

n 次元の積分領域を

$$
K = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n ; x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1 \right\}
$$

として，$p_1 > 0, p_2 > 0, \cdots, p_n > 0, q > 0$ と仮定しておく．このとき，次の n 重積分はディリクレ積分と呼ばれ

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\cdots\int_K x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{q-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(q)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + q)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

（証明）

次のような変数変換

$$
(*)\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = u_1 \\
x_2 + x_3 + \cdots + x_n = u_1 u_2 \\
x_3 + \cdots + x_n = u_1 u_2 u_3 \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} + x_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \\
x_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n
\end{cases}
$$

とおいて，$x_1 x_2 \cdots x_n$ 系を $u_1 u_2 \cdots u_n$ 系に変換してみる．すると $(*)$ は

$$
\begin{aligned}
u_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n\,, \\
u_2 &= \frac{x_2 + \cdots + x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \\
u_3 &= \frac{x_3 + \cdots + x_n}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}, \\
&\cdots\cdots \\
u_n &= \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n}
\end{aligned}
$$

または逆に

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u_1 - u_1u_2 = u_1\left(1-u_2\right), \\
x_2 &= u_1u_2 - u_1u_2u_3 = u_1u_2\left(1-u_3\right), \\
x_3 &= u_1u_2u_3 - u_1u_2u_3u_4 = u_1u_2u_3\left(1-u_4\right), \\
&\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= u_1u_2\cdots u_{n-1} - u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n = u_1u_2\cdots u_{n-1}\left(1-u_n\right) \\
x_n &= u_1u_2\cdots u_n
\end{aligned}
$$

と変形することができる．したがって，$x_1x_2\cdots x_n$ 系の領域 K と $u_1u_2\cdots u_n$ 系の領域

$$K' = \left\{\left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)\in R^n ; 0<u_1<1,\ 0<u_2<1,\ \cdots,\ 0<u_n<1\right\}$$

との間に 1 対 1 の対応が成り立っていることがわかる．

今，関数行列式（ヤコビアン）$\dfrac{D\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)}{D\left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)}$ を計算するために，仲介の変数として

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1\left(= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\right) \\
v_2 &= u_1u_2\left(= x_2 + x_3 + \cdots + x_n\right) \\
v_3 &= u_1u_2u_3\left(= x_3 + \cdots + x_n\right) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
v_{n-1} &= u_1u_2\cdots u_{n-1}\left(= x_{n-1} + x_n\right) \\
v_n &= u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n\left(= x_n\right)
\end{aligned}
$$

を取ることにすれば

$$
\begin{aligned}
x_1 &= v_1 - v_2 = u_1\left(1-u_2\right), \\
x_2 &= v_2 - v_3 = u_1u_2\left(1-u_3\right), \\
x_3 &= v_3 - v_4 = u_1u_2u_3\left(1-u_4\right), \\
&\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= v_{n-1} - v_n = u_1u_2\cdots u_{n-1}\left(1-u_n\right) \\
x_n &= v_n = u_1u_2\cdots u_n
\end{aligned}
$$

である．

このことから関数行列式（ヤコビアン）は

$$\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(v_1, v_2, \cdots, v_n)} \frac{D(v_1, v_2, \cdots, v_n)}{D(u_1, u_2, \cdots, u_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 u_3 & u_1 u_3 & u_1 u_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_2 u_3 \cdots u_n & \cdots & \cdots & \cdots & u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1}$$

となっている．よって

$$I = \iint \cdots \int_{K'} \{u_1(1-u_2)\}^{p_1-1} \{u_1 u_2 (1-u_3)\}^{p_2-1} \{u_1 u_2 u_3 (1-u_4)\}^{p_3-1}$$

$$\times \cdots \times \{u_1 u_2 \cdots u_{n-1}(1-u_n)\}^{p_{n-1}-1} (u_1 u_2 \cdots u_n)^{p_n-1} (1-u_1)^{q-1} u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1}\, du_1 du_2 \cdots du_n$$

$$= \int_0^1 u_1^{p_1+\cdots+p_n-1}(1-u_1)^{q-1} du_1 \cdot \int_0^1 u_2^{p_2+\cdots+p_n-1}(1-u_2)^{p_1-1} du_2 \cdot \int_0^1 u_3^{p_3+\cdots+p_n-1}(1-u_3)^{p_2-1} du_3$$

$$\times \cdots \times \int_0^1 u_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1}(1-u_{n-1})^{p_{n-2}-1} du_{n-1} \cdot \int_0^1 u_n^{p_n-1}(1-u_n)^{p_{n-1}-1} du_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)\Gamma(q)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)} \frac{\Gamma(p_2+\cdots+p_n)\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_2+\cdots+p_n+p_1)} \frac{\Gamma(p_3+\cdots+p_n)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_3+\cdots+p_n+p_2)}$$

$$\times \cdots \times \frac{\Gamma(p_{n-1}+p_n)\Gamma(p_{n-2})}{\Gamma(p_{n-1}+p_n+p_{n-2})} \frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_n+p_{n-1})}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(q)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)}$$

が得られる．

【証明終】

4. おわりに

確率密度関数が

$$f(x_1, \cdots, x_n) = C x_1^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1} \qquad (C\text{は正規化定数（または，正規化項）})$$

となっている（ただし，$x_1+\cdots+x_n=1,\ x_1 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0$ を満たす $(x_1, \cdots, x_n)$ についてのみ確率が定義されるとする）n 次元の確率分布をディリクレ分布というが，ディリクレ積分の結果により正規化定数の値が

$$C = \frac{\Gamma\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_n\right)}$$

となることがわかる.

詳細については，他書を参照されたい.

参考文献

1）高木貞治「解析概論（改訂三版）」岩波書店，1961
2）杉浦光夫「解析入門II」東京大学出版会，1985