東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.61-70

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 22）
～アダマールの不等式～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 22
~ Hadamard Inequality ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

行列式の絶対値の上限に関して，アダマールの不等式と呼ばれるものがある. この論文ではアダマールの不等式を，正値エルミート行列を用いて詳細に証明することを目標とする.

Abstract

With respect to supremum of absolute values of determinants, we give the Hadamard inequality. The purpose of this paper is to present a full proof by means of positive-definite Hermitian matrices .

キーワード: 正値エルミート行列, 行列式, アダマールの不等式
Keywords: *Positive-Definite Hermitian Matrix , Determinant , Hadamard Inequality*

1. はじめに

線形代数で学ぶ行列式については様々なことが知られている．行列式の絶対値の上限についての，アダマールの不等式と呼ばれる次の定理がある．

定理（アダマールの不等式）

n 次行列

$$A=(\boldsymbol{a_1}\,,\boldsymbol{a_2},\cdots\cdots,\boldsymbol{a_n}\,)\qquad（ただし，\boldsymbol{a_k}\text{ を }A\text{ の第}k\text{ 列とする}）$$

に対して

$$\mathrm{abs}|A|\leqq\|\boldsymbol{a_1}\|\|\boldsymbol{a_2}\|\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\|$$

が成り立つ．

これについていくつかの証明方法が知られているが，エルミート形式を用いた証明を与えることとする[1)2)3)4)5)]．

今，複素数を成分とする n 次行列 M の転置共役行列を M^* と表すことにする．$A^*=A$ を満たすものをエルミート行列といい，$U^*=U^{-1}$ を満たすものをユニタリー行列という．これらについて以下の 3 つの定理が成り立つことが知られている．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

定理 1.1

エルミート行列の対角成分および固有値はすべて実数である.

定理 1.2

ユニタリー行列の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数である.

定理 1.3

n 次エルミート行列 A は，適当なユニタリー行列 U によって

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}\quad (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \text{は}, A\text{の固有値})$$

と対角化できる.

2. エルミート形式

今

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad (\text{ただし，}\ a_{ij}=\overline{a_{ji}})$$

を n 次エルミート行列

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in C^n$$

を n 次元複素ベクトルとするとき

$$f(\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j$$

（ただし，$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{u}={}^t\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$ で n 次元複素ベクトル空間 C^n の標準内積を表す）

のことを，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関する a_{ij} を係数とするエルミート形式といい、A をエルミート形式 $f(\boldsymbol{x})$ の係数行列という．また，エルミート形式は必ず実数の値をとる.

$f(\boldsymbol{x})$ がベクトル $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ に対して，常に $f(\boldsymbol{x})>0$ となるとき，$f(\boldsymbol{x})$ を正値エルミート形式とよび，A を正値エルミート行列と呼ぶ．また，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$f(\boldsymbol{x})\geqq 0$ となるときには，f および A は半正値であるといわれる.

定理 2.1

複素数を成分とするn次行列 Aについて，半正値エルミート行列であるための必要十分条件は，すべての固有値が非負であることである．

特に，正値エルミート行列であるための必要十分条件は，すべての固有値が正であることである．

定理 2.2

複素数を成分とするn次行列 Aについて，半正値エルミート行列であるための必要十分条件は，$A = P^*P$ となるようなn次行列Pが存在することである．

特に，正値エルミート行列であるための必要十分条件は，$A = P^*P$ となるようなn次正則行列Pが存在することである．

定理 2.3

半正値エルミート行列の任意の対角小行列（主対角線上にある小行列）は，これもまた半正値エルミート行列である。また，正値エルミート行列の任意の対角小行列は，これもまた正値エルミート行列である。

（証明）

今

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & h_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

が半正値エルミート行列であるとき，i_1行，i_2行，⋯ ，i_r行およびi_1列，i_2列，⋯ ，i_r列で作った対角小行列を

$$H_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)} = \begin{pmatrix} h_{i_1i_1} & h_{i_1i_2} & \cdots & h_{i_1i_r} \\ h_{i_2i_1} & h_{i_2i_2} & & h_{i_2i_r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{i_ri_1} & h_{i_ri_2} & \cdots & h_{i_ri_r} \end{pmatrix} \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n)$$

としておく．

半正値エルミート形式

$$x^*Hx = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & h_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

において，x の$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$以外の成分をすべて 0 にした列ベクトルを$x_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)}$と表せば

*以下の式が成り立つことについては，p.4 の（**定理 2.3 の補足**）を参照されたい．

$$\left\{\boldsymbol{x}_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)}\right\}^* H\boldsymbol{x}_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)} = \sum_{i_k,i_l} h_{i_k i_l}\overline{x_{i_k}}\,x_{i_l}$$

$$= \left(\overline{x_{i_1}},\overline{x_{i_2}},\cdots,\overline{x_{i_r}}\right)\begin{pmatrix} h_{i_1i_1} & h_{i_1i_2} & \cdots & h_{i_1i_r} \\ h_{i_2i_1} & h_{i_2i_2} & & h_{i_2i_r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{i_ri_1} & h_{i_ri_2} & \cdots & h_{i_ri_r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\overline{x_{i_1}},\overline{x_{i_2}},\cdots,\overline{x_{i_r}}\right)H_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)}\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} \geqq 0$$

であるから，$H_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)}$は，半正値エルミート行列であることが示された．

また，正値エルミート行列の場合についても全く同様に証明される．

（証明終）

（定理 2.3 の補足）

例えば，H が 5 次行列の場合に

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}$$

とするとき

$$\boldsymbol{x}_{(2,5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \left\{\boldsymbol{x}_{(2,5)}\right\}^* = \left(0\,,\overline{x_2},0,0,\overline{x_5}\,\right)$$

に対して

$$\left\{\boldsymbol{x}_{(2,5)}\right\}^* H\boldsymbol{x}_{(2,5)} = \left(0,\overline{x_2},0,0,\overline{x_5}\right)\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= \left(h_{21}\overline{x_2}+h_{51}\overline{x_5}, h_{22}\overline{x_2}+h_{52}\overline{x_5}, h_{23}\overline{x_2}+h_{53}\overline{x_5}, h_{24}\overline{x_2}+h_{54}\overline{x_5}\,, h_{25}\overline{x_2}+h_{55},\overline{x_5}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= h_{22}\overline{x_2}x_2 + h_{52}\overline{x_5}\,x_2 + h_{25}\ \overline{x_2}x_5 + h_{55}\overline{x_5}x_5\ \cdots ①$$

である．

一方，H の 2 行, 5 行および 2 列, 5 列で作った対角小行列$H_{(2,5)}$ を考えると

$$\left(\overline{x_2},\overline{x_5}\right)H_{(2,5)}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \left(\overline{x_2},\overline{x_5}\right)\begin{pmatrix} h_{22} & h_{25} \\ h_{52} & h_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= (h_{22}\overline{x_2} + h_{52}\overline{x_5},\ \ h_{25}\overline{x_2} + h_{55},\overline{x_5})\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= h_{22}\overline{x_2}x_2 + h_{52}\overline{x_5}\,x_2 + h_{25}\ \overline{x_2}x_5 + h_{55}\overline{x_5}x_5\ \cdots ②$$

であるから，①と②より

$$\{\boldsymbol{x}_{(2,5)}\}^* H\boldsymbol{x}_{(2,5)} = (\overline{x_2}, \overline{x_5})H_{(2,5)}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる．

定理 2.4

対角成分がすべて 1 であるようなn次半正値エルミート行列Hに対して$|H| \leqq 1$ が成り立つ．等号は$H = E$のときにのみ成り立つ．

（証明）

今，Hの固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$とすると，半正値エルミート行列なので

$$\lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \cdots\cdots, \lambda_n \geqq 0$$

となっている．よってあるユニタリー行列Uが存在して

$$U^*HU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

すなわち

$$H = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}U^*$$

が成り立つ．さらに，$|H| = \lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n$ である．

ここで，算術平均と幾何平均の関係を用いると

$$\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n} \leqq \frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n}{n}$$

なので，両辺のn乗を考えるとき

$$|H| = \lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n \leqq \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n \cdots\cdots ①$$

が得られる．ところが，Hは対角成分がすべて 1 であるn次行列であるから

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n = trH = 1+1+\cdots\cdots+1 = n$$

なので①より

$$|H| \leqq \left(\frac{1+1+\cdots\cdots+1}{n}\right)^n = 1$$

となっていることがわかる．

等号が成り立つのは，$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \cdots\cdots, \lambda_n = 1$の場合のみであり，このときは

$$H = U\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}U^* = E$$

であることがわかる.

（証明終）

定理 2.5

ある正値エルミート行列

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & P \\ Q & H_2 \end{pmatrix}$$

（ただし，H_1 は k 次行列，P は (k,l) 型次行列，Q は (l,k) 型次行列，H_2 は l 次行列）

において，$P = 0_{k,l}$，$Q = 0_{l,k}$ （ただし，$0_{s,t}$ は $(s\,,t)$ 型零行列を表す）とした行列

$$H_0 = \begin{pmatrix} H_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & H_2 \end{pmatrix}$$

を作ると

$$|H| \leqq |H_0|$$

が成り立つ．等号が成り立つのは $P = 0_{k,l}$，$Q = 0_{l,k}$ すなわち $H = H_0$ のときに限る.

（証明）

正値エルミート行列の任意の対角小行列は正値エルミート行列なので，$H_1\,,H_2$ も正値エルミート行列である.

したがって，定理 2.2 よりある正則行列 $A_1\,,A_2$ が存在して

$$H_1 = {A_1}^*A_1\,, H_2 = {A_2}^*A_2$$

と書くことができる.

一方，B_1 は k 次行列，B_2 は (k,l) 型次行列，B_3 は (l,k) 型次行列，B_4 は l 次行列であるとき

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} {B_1}^* & {B_3}^* \\ {B_2}^* & {B_4}^* \end{pmatrix}$$

が成り立つことに留意しておく．すると，直接の計算により

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1} \\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {A_1}^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & {A_2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1} \\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {A_1}^* & P{A_2}^{-1} \\ Q{A_1}^{-1} & {A_2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {A_1}^*A_1 & P \\ Q & {A_2}^*A_2 \end{pmatrix} = H$$

となることがわかるので

$$H=\begin{pmatrix}{A_1}^* & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & {A_2}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}$$

が成り立ち．

特に$P=0_{k,l}$，$Q=0_{l,k}$ の場合には

$$H_0=\begin{pmatrix}{A_1}^* & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & {A_2}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & E_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}$$

となることが示される．

さて任意の$x(\neq 0)\in C^{k+l}$ に対して$C^{k+l}\ni y=\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}^{-1}x\,(\neq 0)$すなわち$x=\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}y$とおくと，$H$は正値エルミート行列なので

$$\begin{aligned}x^*\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}x&=\left\{\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}y\right\}^*\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}y\right\}\\ &=y^*\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}y\\ &=y^*\begin{pmatrix}{A_1}^* & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & {A_2}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{pmatrix}y\\ &=y^*Hy>0\end{aligned}$$

であるから$\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}$も正値エルミート行列であることが示された．対角成分はすべて 1 である．

したがって，上の定理 2.4 により

$$\begin{vmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{vmatrix}\leqq 1=\begin{vmatrix}E_k & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & E_l\end{vmatrix}$$

であり，等号が成り立つのは

$$({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}=0_{k,l},\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1}=0_{l,k}\text{すなわち}P=0_{k,l},\ Q=0_{l,k}$$

のときに限るから

$$|H|=\begin{vmatrix}{A_1}^* & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & {A_2}^*\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{vmatrix}\leqq\begin{vmatrix}{A_1}^* & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & {A_2}^*\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_k & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & E_l\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & A_2\end{vmatrix}=|H_0|$$

が成り立ち，等号は$\begin{pmatrix}E_k & ({A_1}^*)^{-1}P{A_2}^{-1}\\ ({A_2}^*)^{-1}Q{A_1}^{-1} & E_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_k & 0_{k,l}\\ 0_{l,k} & E_l\end{pmatrix}=E_{k+l}$であるとき，すなわち $H=H_0$ のときに限る．

（証明終）

この定理 2.5 を繰り返して適用すると，次の定理が得られる．

定理 2.6

n 次行列

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots\cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots\cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

が，正値エルミート行列ならば

$$|H| \leqq h_{11}h_{22}\cdots\cdots h_{nn}$$

であり，等号が成り立つのは，H が対角行列であるとき，すなわち

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

のときに限る．

（証明）

定理 2.5 を繰り返して用いると

$$|H|=\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots\cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots\cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} h_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & h_{22} & \cdots\cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & h_{n2} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = h_{11}\begin{vmatrix} h_{22} & \cdots\cdots & h_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n2} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\leqq h_{11}\begin{vmatrix} h_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & h_{33} & \cdots\cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & h_{n3} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22}\begin{vmatrix} h_{33} & \cdots\cdots & h_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n3} & \cdots\cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \leqq \cdots\cdots \leqq h_{11}h_{22}\cdots\cdots h_{nn}$$

が得られる．

等号が成り立つのは，H のすべての非対角成分が 0 であるとき，すなわち

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

のときに限る．

（証明終）

3. アダマールの不等式

第2章で示した定理2.6などを用いて，アダマールの不等式を証明する．

定理（アダマールの不等式）

n 次行列 A を

$$A=(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots\cdots, \boldsymbol{a_n}) \qquad \text{（ただし，}\boldsymbol{a_k}\text{ を }A\text{ の第}k\text{ 列とする）}$$

と表すとき

$$\mathrm{abs}|A| \leqq \|\boldsymbol{a_1}\|\|\boldsymbol{a_2}\|\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\|$$ （ただし，abs α は複素数 α の絶対値を表す）

が成り立つ．等号が成り立つのは $(\boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_i}) = \boldsymbol{a_i}^*\boldsymbol{a_j} = \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j})$ のときに限る．

ただし，$\|\boldsymbol{a_k}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a_k})} = \sqrt{\boldsymbol{a_k}^*\boldsymbol{a_k}}$ と定義されており，$\boldsymbol{a_k}$ のノルムと呼ばれる．

（証明）

任意の n 次正則行列 $A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots\cdots, \boldsymbol{a_n})$ に対して

$$H = A^*A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1}^*\boldsymbol{a_1} & & * \\ & \boldsymbol{a_2}^*\boldsymbol{a_2} & \\ & & \ddots & \\ * & & & \boldsymbol{a_n}^*\boldsymbol{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a_1}\|^2 & & * \\ & \|\boldsymbol{a_2}\|^2 & \\ & & \ddots & \\ * & & & \|\boldsymbol{a_n}\|^2 \end{pmatrix}$$

は，定理2.2より正値エルミート行列であるから，定理2.6より

$$|H| \leqq \|\boldsymbol{a_1}\|^2\|\boldsymbol{a_2}\|^2\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\|^2$$

が成り立つことがわかる．また

$$|H| = |A^*||A| = \overline{|A|}|A| = (\mathrm{abs}|A|)^2$$

であるから

$$(\mathrm{abs}|A|)^2 \leqq \|\boldsymbol{a_1}\|^2\|\boldsymbol{a_2}\|^2\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\|^2$$

が成り立つことが示される．

したがって

$$\mathrm{abs}|A| \leqq \|\boldsymbol{a_1}\|\|\boldsymbol{a_2}\|\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\|$$

が得られる．

定理2.6より，等号が成り立つのは H が対角行列であるとき，すなわち $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}) = \boldsymbol{a_j}^*\boldsymbol{a_i} = 0$ $(i \neq j)$ のときに限る．

（証明終）

4. おわりに

アダマールの不等式は，以下の形で記述されることもある[2)6)]．

n 次行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表しておく．

A の n^2 個の成分の絶対値の最大値を M すなわち，$|a_{kl}| \leqq M$ $(k, l = 1,2,\cdots,n)$ とおくと

$$\|a_r\|^2 = |a_{1r}|^2 + |a_{2r}|^2 + \cdots + |a_{nr}|^2 \leqq nM^2 \qquad (r = 1,2,\cdots,n)$$

となっているから

$$\|\boldsymbol{a_r}\| \leqq \sqrt{n}M \quad (r = 1,2,\cdots,n)$$

が得られる．

よって

$$\mathrm{abs}|A| \leqq \|\boldsymbol{a_1}\|\|\boldsymbol{a_2}\|\cdots\cdots\|\boldsymbol{a_n}\| \leqq \sqrt{n^n}M^n$$

が成り立つことが示される.

参考文献

1） 遠山啓「行列論」共立出版，1952
2） 佐武一郎「線型代数学」裳華房，1958
3） 佐藤正次，永井治 共編「基礎課程 線型代数学」学術図書出版，1976
4） 横山雄一「線形代数学」昭晃堂，1975
5） 川原雄作，木村哲三，藪康彦，亀田真澄 共著「線形代数の基礎」共立出版，1994
6） 後藤憲一，山本邦夫，神吉健 共著「詳解物理応用数学演習」共立出版，1979