東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.65-73

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 16）
～有限群の表現論の基礎概念～

貴田　研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.16
~ Concepts of Representations of Finite Groups ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 28, 2017　&　accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

有限群の表現論の導入として，行列による表現，および指標とその直交関係についての基本事項に関する解説を行う．具体例としては，対称群に関するものを取り扱う．

Abstract

As an introduction to the representation theory of finite groups, we explain basic matters of matrix representations, characters of groups, and orthogonality relations. We treat cases of symmetric groups as concrete examples.

キーワード: 有限群の表現，群の指標，直交関係
Keywords: *Representation of Finite Group, Character of Group, Orthogonality Relation*

1. はじめに

大学初年次において，群，環，体などの代数系について学ぶ．本論文では，有限群の表現論の入り口の部分についての解説をおこなう [1)2)3)4)]．

この論文では，クロネッカーのデルタと呼ばれる次の記号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を使うこととする．

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 次の一般線形変換群，すなわち n 次の正則行列がつくる群を $GL(n, \mathbf{C})$ とする．群 G から $GL(n, \mathbf{C})$ の中への準同型写像 $\mathbf{A}: a \to A(a)$ を G の表現といい，n をその次数という．このとき

$$A(ab) = A(a)A(b),\ A(e) = E,\ A(a^{-1}) = A(a)^{-1}$$

が成り立つ．

特に $\mathbf{A}$ が同型写像であるとき，これを忠実な表現（faithful representation）という．

群 G の 2 つの表現 $\mathbf{A}: a \to A(a)$ と $\mathbf{B}: a \to B(a)$ に対して，正則行列 P があって

$$B(a) = P^{-1}A(a)P \qquad (a \in G)$$

*1 高輪教養教育センター　准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

が成り立つとき，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ とは同値な表現であるといい，$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ と表記する．

群 G の n 次の表現 $\mathbf{A}: a \to A(a)$ に対して，正則行列 P があって

$$P^{-1} A(a) P = \begin{pmatrix} B(a) & 0 \\ D(a) & C(a) \end{pmatrix}$$

となるとき，$\mathbf{A}$ は可約であるといわれ，可約ではないとき既約であるといわれる．

群 G の 2 つの表現 $\mathbf{A}: a \to A(a)$ と $\mathbf{B}: a \to B(a)$ とが与えられているとき，これらを合成してできる表現 $a \to \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & B(a) \end{pmatrix}$ のことを，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の直和といい，$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ と書く．

2. 有限群の表現論の例

例 1　G の各元に数 1 を対応させれば，G の 1 次表現が得られる．これを G の単位表現（恒等表現）と呼ぶ．

例 2　G が指数 2 の部分群(したがって, 正規部分群) H をもち $G = H + aH$ と表されるとき, H の元に $+1$, aH の元に -1 を対応させる写像は，G の 1 次表現を与えるが，交代表現と呼ばれる．例えば，n 次対称群 S_n について, n 次交代群 A_n は指数 2 の部分群であるが，A_n の元に $+1$，A_n 以外の元に -1 を対応させると，S_n の交代表現となる．

例 3

3次対称群 S_3 として，次の 2 つを挙げておく．

① 2 次の表現 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}((1,\ 2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}((1,\ 3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}((2,\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}((1,\ 2,\ 3)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}((1,\ 3,\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

この表現 $\mathbf{A}$ は既約であることが知られている．

② 3 次表現 $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}((1,2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}((1,3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}((2,3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}((1,2,3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}((1,3,2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}.$$

この表現 $\mathbf{B}$ は可約であることが知られている．

例 4

S_n を n 次対称群とする．また n 次単位行列 E の第 i 行を e_i とする． S_n の元 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\s_1&s_2&\cdots&s_n\end{pmatrix}$ に対して $A(\sigma)=\begin{pmatrix}e_{s_1}\\e_{s_2}\\\vdots\\e_{e_n}\end{pmatrix}$ を対応させる．例えば S_4 に対して

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad (1,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(1,4)(2,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad (2,4,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(1,3,4,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

などとする．

この対応 $\sigma\to A(\sigma)$ は， S_n の忠実な表現である．

3. 指標

n 次行列 $A=(a_{ij})$ の対角線上の数の和をトレースといい， $\operatorname{tr}A$ と表す．

$$\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

であり，次の(1), (2)が成り立つ．

(1)　$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$　　(2)　$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}\,A$　（Pは正則行列）

一般に，群 G の表現を $\mathbf{A}: a \to A(a)$ とするとき，$\mathrm{tr}\,A(a)=\chi(a)$ とすれば，χ は複素数値をとる G 上の関数で，これを表現 $\mathbf{A}$ の指標（character）という．明らかに，$\chi(e)$ の値は表現 $\mathbf{A}$ の次数に等しい．同値な表現の指標は一致する．特に，既約表現の指標を既約指標という．

表現の指標 χ は，G において共役な元に対して同じ値をとり，類関数と呼ばれるものの1つである．

定理 3.1　群 G の2つの表現 $\mathbf{A}: a \to A(a)$ と $\mathbf{B}: a \to B(a)$ の直和 $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}$ について

$$\chi_{\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}}=\chi_{\mathbf{A}}+\chi_{\mathbf{B}}$$

が成り立つ．

一般に，有限群 G の上で定義された複素数の値をとる関数 ϕ, φ に対して，内積 (ϕ, φ) を

$$(\phi, \varphi)=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\phi(a)\cdot\varphi(a^{-1})$$

と定義する．

特に，$(\phi, \varphi)=0$ のとき，ϕ, φ とは直交するといわれる．

次に，指標の直交関係について述べる．

定理 3.2（指標の第1直交関係）

G を位数 g の有限群とする．

(1)　χ を G の既約指標とすれば

$$(\chi, \chi)=\frac{1}{g}\sum_{x\in G}\chi(x)\chi(x^{-1})=1$$

(2)　χ と χ' を同値でない2つの既約表現の指標とすれば

$$(\chi, \chi')=\frac{1}{g}\sum_{x\in G}\chi(x)\chi'(x^{-1})=0$$

今，有限群 G の既約表現の同値類から代表元を1つずつとって，それを $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots$ とし，$\chi_1, \chi_2, \cdots$ をそれらの指標とする．また $K_1, K_2, \cdots, K_k$ を G の共役類とし，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ をその完全代表系とする．このとき指標の第1直交関係は次のように簡単に書き表すことができる．

定理 3.2′　$(\chi_i, \chi_j)=\delta_{ij}$

また，$\chi(a^{-1})=\overline{\chi(a)}$　（$\overline{\chi(a)}$ は，$\chi(a)$の共役複素数）が成り立つことと，指標が類関数であることから

定理 3.2″　$|G|=g, |K_\alpha|=h_\alpha$ とすれば

$$\frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{k}h_\alpha\,\chi_i(a_\alpha)\,\overline{\chi_j(a_\alpha)}=\delta_{ij}$$

と書き表すことができる．

さらに，指標について以下のことが知られている．

定理3.3

群 G の2つの表現が同値であるための必要十分条件は，それらの指標が一致することである．

定理3.4

群 G の既約指標を $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_l$ とし，それらに対応する既約表現の次数を $f_1, f_2, \cdots, f_l$ ，G の位数を g とすれば

(1) $g = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_l^2$

(2) $f_1\,\chi_1(a) + f_2\,\chi_2(a) + \cdots + f_l\,\chi_l(a) = 0 \quad (a \neq e)$

群 G の既約指標の整数を係数とする一次結合を G の一般指標という．

定理3.5

群 G の一般指標 χ が既約指標であるための必要十分条件は，χ が

(1) $(\chi, \chi) = 1$　　(2) $\chi(e) > 0$

を満たすことである．

定理3.6（指標の第2直交関係）

群 G の異なる既約指標を $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_l$ として，a_α の中心化群 $C(a_\alpha)$ の位数を n_α とすれば

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \chi_i(a_\alpha)\overline{\chi_i(a_\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\,n_\alpha$$

が成り立つ．

指標の2つの直交関係を与える定理3.2，定理3.6 から次の定理が導かれる．

定理3.7

有限群 G の異なる既約指標の個数（同値でない既約表現の個数）は，G の共役類の個数に等しい．

4. 表現の積

s 次行列 $A = (a_{ij})$ と t 次行列 B に対して，次の st 次行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2s}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}B & a_{s2}B & \cdots & a_{ss}B \end{pmatrix}$$

のことを A と B のテンソル積（または，クロネッカー積）といい，$A\otimes B$ と表す．$A\otimes B$ のトレースについては

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(A\otimes B\right) &= a_{11}\left(\mathrm{tr}\,B\right)+a_{22}\left(\mathrm{tr}\,B\right)+\cdots+a_{ss}\left(\mathrm{tr}\,B\right) \\ &= \left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{ss}\right)\left(\mathrm{tr}\,B\right) \\ &= \left(\mathrm{tr}\,A\right)\left(\mathrm{tr}\,B\right)\cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

が成り立つ．

また，s 次行列 $A'=\left(a'_{ij}\right)$ と t 次行列 B' に対して

$$\begin{aligned} \left(A\otimes B\right)\left(A'\otimes B'\right) &= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1s}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}B & \cdots & a_{ss}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_{11}B' & \cdots & a'_{1s}B' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1}B' & \cdots & a'_{ss}B' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{1k}\,a'_{k1}\right)BB' & \cdots & \left(\sum_{k=1}^{s} a_{1k}\,a'_{ks}\right)BB' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\sum_{k=1}^{s} a_{sk}\,a'_{k1}\right)BB' & \cdots & \left(\sum_{k=1}^{s} a_{sk}\,a'_{ks}\right)BB' \end{pmatrix} \\ &= \left(AA'\right)\otimes\left(BB'\right)\cdots\cdots(**) \end{aligned}$$

が成り立つ．

群 G の2つの表現 $\mathbf{A}:a\to A(a)$ と $\mathbf{B}:a\to B(a)$ が与えられているとき $(**)$ より

$$a\to A(a)\otimes B(a)$$

は，また G の表現であることがわかる．これを $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の表現のテンソル積といい，$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ と書く．

次のことが成り立つことがわかる．

定理4.1

有限群 G の2つの表現 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ の指標をそれぞれ $\chi_{\mathbf{A}},\chi_{\mathbf{B}}$ とし，表現のテンソル積 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ の指標を $\chi_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}$ とすると，$(*)$ より

$$\chi_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}(a)=\chi_{\mathbf{A}}(a)\cdot\chi_{\mathbf{B}}(a)$$

が成り立つ．

定理4.2

有限群 G の2つの既約表現 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ において，$\mathbf{B}$ が1次の表現ならば，表現のテンソル積 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ もまた既約である．

5. 対称群の既約指標の計算例

例 1（3 次対称群）

3 次対称群を $S_3 = \{e, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$と表すこととすれば，共役類は

$$C_1 = \{e\},\ C_2 = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3)\},\ C_3 = \{(1, 2, 3),\ (1, 3, 2)\}$$

となっている．S_3 が 3 つの共役類に分けられることから，定理 3.7 より 3 つの既約表現があることがわかる．

ある表現 ρ に対して，指標 χ_ρ が共役類 C_1, C_2, C_3 でとる値が $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ であるとき

$$\chi_\rho = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

と書き表すこととする．単位表現を ρ_1，交代表現を ρ_2 とすると，これらはもちろん 1 次表現であり

$$\chi_{\rho_1} = (1, 1, 1), \quad \chi_{\rho_2} = (1, -1, 1)$$

である．もう 1 つの既約表現を ρ_3 としてその次数を d_3 とおけば，定理 3.4(1)より

$$1^2 + 1^2 + d_3^2 = 6\ (= |S_3|)$$

なので，ρ_3 は 2 次の表現であることがわかる．

そこで，$\chi_{\rho_3} = (2, k_2, k_3)$とおくと，定理 3.4(2)から

$$\begin{cases} 1\times1 + 1\times(-1) + 2k_2 = 0 \\ 1\times1 + 1\times1 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

なので，$\chi_{\rho_3} = (2, 0, -1)$が得られる．表にまとめると以下のようになる．

	C_1	C_2	C_3
χ_{ρ_1}	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	-1	1
χ_{ρ_3}	2	0	-1

例 2（4 次対称群）

4次対称群 S_4 の共役類分解は

$$
\begin{aligned}
&C_1=\{e\},\\
&C_2=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4)\},\\
&C_3=\{(1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\},\\
&C_4=\{(1,2,3),\ (1,3,2),\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (1,3,4),\ (1,4,3),\ (2,3,4),\ (2,4,3)\},\\
&C_5=\{(1,2,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (1,4,3,2),\}
\end{aligned}
$$

となっている． S_4 が 5 つの共役類に分けられることから，定理 3.7 より 5 つの既約表現があることがわかる．例 1 と同様に, ある表現 σ に対して, 指標 χ_σ が共役類 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 でとる値が $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ であるとき， $\chi_\sigma=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ と書き表すこととする．

単位表現を ρ_1 ，交代表現を ρ_2 とすると，これらは 1 次表現であり

$$\chi_{\rho_1}=(1,1,1,1,1),\quad \chi_{\rho_2}=(1,-1,1,1,-1)$$

である．次に第 2 章例 3 で述べた表現の $n=4$ の場合を，表現 ρ とすれば

$$\chi_\rho=(4,2,0,1,0)$$

となる．ところが， $\rho=\rho_1\oplus\rho_3$ と分解されることが知られている [3)]．すると，定理 3.1 より $\chi_\rho=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_3}$ なので

$$\chi_{\rho_3}=(3,1,-1,0,-1)$$

となっている．これについて

$$(\chi_{\rho_3}, \chi_{\rho_3})=\frac{1}{4!}\left\{1\times3^2+6\times1^2+3\times(-1)^2+8\times0^2+6\times(-1)^2\right\}=\frac{24}{24}=1$$

であるから，定理 3.5 より ρ_3 は 3 次の既約表現であることがわかる．

交代表現 ρ_2 は 1 次表現なので，定理 4.2 より，3 次表現 $\rho_4=\rho_3\otimes\rho_2$ もまた既約である，さらに，定理 4.1 より

$$\chi_{\rho_4}=\chi_{\rho_3}\chi_{\rho_2}=(3,-1,-1,0,1)$$

が成り立つ．残り 1 つの既約表現を ρ_5 としてその次数を d_5 とおけば，定理 3.4(1)より

$$1^2+1^2+3^2+3^2+d_5^2=24\ (=|S_4|)$$

なので， ρ_5 は 2 次の表現であることがわかる．

そこで， $\chi_{\rho_5}=(2, k_2, k_3, k_4, k_5)$ とおくと，定理 3.4(2)から

$$\begin{cases} 1\times1+1\times(-1)+3\times1+3\times(-1)+2k_2=0 \\ 1\times1+1\times1+3\times(-1)+3\times(-1)+2k_3=0 \\ 1\times1+1\times1+3\times0+3\times0+2k_4=0 \\ 1\times1+1\times(-1)+3\times(-1)+3\times1+2k_5=0 \end{cases}$$

なので， $\chi_{\rho_5}=(2, 0, 2, -1, 0)$が得られる．表にまとめると以下のようになる．

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	3	1	-1	0	-1
χ_{ρ_4}	3	-1	-1	0	1
χ_{ρ_5}	2	0	2	-1	0

参考文献

1） 永尾汎「群論の基礎」朝倉書店，1967
2） 浅野啓三，永尾汎共著「群論」岩波全書，1965
3） 彌永昌吉，杉浦光夫共著「応用数学者のための代数学」岩波書店，1960
4） 服部昭「群とその表現」共立出版，1967