

東海大学紀要

情報通信学部

PROCEEDINGS OF
THE SCHOOL OF INFORMATION AND
TELECOMMUNICATION ENGINEERING
TOKAI UNIVERSITY



Vol.12 No.2 2019

東海大学紀要

情報通信学部

Vol.12 No.2 2019

目次

論文

サプライチェーンにおいて間接的な需要情報共有によってブルウィップ効果を低減する方法の検討
.....水野浩孝..... 1

大型ディスプレイにおけるハンドジェスチャによるポインティング操作に関する研究
-ポインティング操作へのFittsの法則の適用について-
.....松山周平・辛島光彦..... 8

トピックス

ICTを用いたシステムの安全性に関する最近の動向
.....小林 洋..... 15

大学初年次における数学教材の提案（その29）～行列の指数関数とその応用～
.....貴田研司..... 19

大学初年次における数学教材の提案（その30）～ガロア群～
.....貴田研司..... 32

大学初年次における数学教材の提案（その31）～有限体のガロア群～
.....貴田研司..... 40

大学初年次における数学教材の提案（その32）～ガロア群の軌道～
.....貴田研司..... 44

その他

高輪キャンパスにおける健康スポーツ科目の新たな取り組み
.....北濱幹士・高木由起子・早川みどり・大岡直美・藤原豊樹・野澤隆司・光本健次..... 49

PROCEEDINGS
OF THE
SCHOOL OF INFORMATION
AND TELECOMMUNICATION ENGINEERING
TOKAI UNIVERSITY
CONTENTS

Vol.12 No.2 2019

Papers

- A Method of Reducing the Bullwhip Effect in Supply Chain by Sharing Demand Information Indirectly
.....Hiroataka MIZUNO... 1
- A Study on Characteristics of Hand Gesture Pointing Operation on Large Monitor
-Application of Fitts' Law to Hand Gesture Pointing Operation-
..... Shuhei MATSUYAMA and Mitsuhiro KARASHIMA... 8

Topics

- Recent Trends in System Safety Using ICT
..... Hiromi KOBAYASHI... 15
- A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 29
~ Exponential Functions of Matrices and Their Applications ~
..... Kenshi KIDA... 19
- A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 30
~ The Galois Groups ~
..... Kenshi KIDA... 32
- A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 31
~ The Galois Groups of Finite Fields ~
..... Kenshi KIDA... 40
- A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 32
~ The Orbits of Galois Groups ~
..... Kenshi KIDA... 44

Others

- Reformation of the Physical Education Program at Takanawa Campus
..... Kanji KITAHAMA, Yukiko TAKAGI, Midori HAYAKAWA, Naomi OOKA,
Toyoki FUJIWARA, Takashi NOZAWA and Kenji MITSUMOTO... 49

サプライチェーンにおいて間接的な需要情報共有によって ブルウィップ効果を低減する方法の検討

水野 浩孝*¹

A Method of Reducing the Bullwhip Effect in Supply Chain by Sharing Demand Information Indirectly

by

Hiroataka MIZUNO*¹

(received on Sep. 25, 2019 & accepted on Nov. 15, 2019)

あらまし

サプライチェーンを上流側に進むにしたがい需要量のばらつきが増幅されるブルウィップ効果と呼ばれる現象が発生する問題が知られている。ブルウィップ効果の低減策として、チェーン全体で需要量などの情報を共有することが有効であることが知られている。しかし、現実にはサプライチェーン全体で情報共有することが困難であることが多い。本論文では、情報共有が困難なチェーンを対象として、下流側の段階からの発注量からこの下流側段階への発注量（需要量）を推定し、この推定値を用いて情報共有を間接的に実現する（近似する）方法について検討し、この方式を組み込んだチェーンのモデルを提案する。そしてシミュレーション実験を行い提案モデルの有効性を検証する。

Abstract

In supply chains, a phenomenon called bullwhip effect is widely known, that variation in final demand is amplified as the demand information goes up the chain upstream. As an effective mean to reduce the bullwhip effect is known, that sharing various information throughout the chain. However, it is often difficult to share information throughout the chain. In this paper, we consider the way for a stage to estimate the demand quantity of its downstream stage from the order quantity of the downstream stage. Then, a new model is proposed where indirect information sharing is realized using the above estimated value. Finally, simulation experiments are conducted to verify the proposed model.

キーワード: サプライチェーン, ロジスティクス, ブルウィップ効果, 情報共有, 需要予測

Keywords: Supply Chain, Logistics, Bullwhip Effect, Information Sharing, Demand Forecast

1. はじめに

メーカー、卸、小売などの複数の企業が行う供給活動の連鎖であるサプライチェーンにおいて、顧客の需要量（最終需要量）がそれほどばらついていないにもかかわらず、上流側での需要量が大きくばらつくことが現実の問題として知られている。需要量のばらつきがチェーンを上流に進むにしたがい増幅されるこの現象はブルウィップ効果と呼ばれ、上流側の企業での生産や在庫管理のコストを増大させてしまう^{1),2)}。その発生要因として、各段階のリードタイムの存在、各段階が限られた情報に基づいて行う発注行動などが指摘されてきた^{3)~7)}。

ブルウィップ効果を低減する手法として、チェーン内の様々な情報をチェーン全体で共有することの有効性がこれまでに報告されている^{4),6),8),9)}。チェーン全体での情報共有は、メーカーとその系列企業のように

参加企業間に資本関係がある場合であれば、比較的容易であろう。しかし、現実のサプライチェーンでは必ずしも全ての参加企業に資本関係があるわけではない。この場合、各々の参加企業に情報が提供されるようにすることは容易ではない。

本論文では、チェーン内での情報共有が困難な場合についてブルウィップ効果を低減する方法として擬似的情報共有型モデルを提案する。情報共有しない情報分散型モデル、従来研究の情報共有型モデル、そして提案する擬似的情報共有型モデルの3つについてシミュレーション実験を行い、発生するブルウィップ効果を比較し、提案モデルの有効性を検証する。

以下、第2節ではサプライチェーンの基本的なモデル（情報分散型と情報共有型）を紹介し、第3節では間接的な情報共有を行う提案モデルの概要ならびに提案モデルの中心的な処理である最終需要量推定について説明する。そして、第4節ではシミュレーション実験による提案モデルの有効性検証について述べる。

*1 情報通信学部 経営システム工学科 教授
School of Information and Telecommunication
Engineering, Department of Management Systems
Engineering, Professor

2. 直列多段階サプライチェーンの基本的なモデル

ここでは最終需要情報の共有によるブルウィップ効果の低減に関する従来研究について述べる。

2.1 情報分散型チェーンと情報中央集権型（情報共有型）チェーン

ここでは以下の2種類の直列多段階サプライチェーンのモデルを紹介しておく。

(1) 情報分散型チェーン

Fig. 1に示すように、情報分散型ではチェーンの各段階は下流側の段階から発注情報のみを受けて、上流側の段階への発注量を決定する。情報共有は行わない。図で Z は情報の伝達を1期間遅らせる演算子であり、各段階から発注情報は1期間遅れて上流側段階に伝達されることを示している。また、商品は、発注されてから補充リードタイムだけ経過した後上流側段階から到着する。このモデルではブルウィップ効果が顕著に現れることが知られている。

(2) 情報中央集権型（情報共有型）チェーン

情報中央集権型（情報共有型）では、Fig. 2のように、各段階は下流側からの発注情報に加えて最終需要量の情報も受け取って、これらの情報を総合して発注量を決定する。最終需要情報は全ての段階に遅れなしで伝達される。このモデルではブルウィップ効果の発生が抑制されることが知られている。

2.2 記号の定義

本論文で用いる記号を以下に列挙しておく。

- d_t : 期間 t における最終需要量（顧客の需要量）
- $D_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の需要量
- $Y_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の出荷量
- $Q_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の発注量

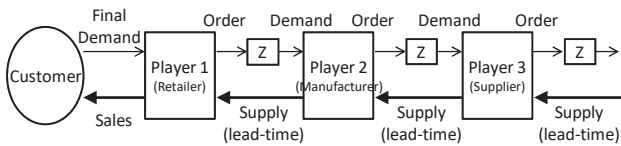


Fig. 1 Decentralized Supply Chain Model

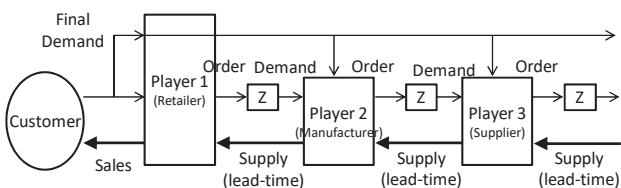


Fig. 2 Centralized Supply Chain Model (Sharing Demand Information)

- $X_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の入荷量
- $S_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の期末在庫
- $\hat{D}_t^{(i)}$: 期間 t における段階 i の需要予測値
- $SS^{(i)}$: 段階 i の安全在庫量（一定値とする）
- L_i : 段階 i の補充リードタイム
- p_i : 段階 i の需要予測時の移動平均計算期間

2.3 チェーンの各段階の行動

本論文では2.1で紹介した2つのチェーンのいずれでも、期間 t において各段階 i は以下の手順1~4に従い行動するものとする。そして、発注については定期発注方式で行うとする。

1. 上流側の段階 $i+1$ から入荷量 $X_t^{(i)}$ を受け入れる
2. 下流側の段階 $i-1$ から需要量 $D_t^{(i)}$ を受注する
3. 段階 $i-1$ に対して出荷量 $Y_t^{(i)}$ を出荷する
4. 段階 $i+1$ への発注量 $Q_t^{(i)}$ を決定して発注する

各段階の発注情報は1期間遅れて上流側に伝達されるとものとする。段階 i の需要量 $D_t^{(i)}$ について次式が成り立つ。

$$D_t^{(i)} = \begin{cases} d_t & (i = 1) \\ Q_{t-1}^{(i-1)} & (i \geq 2) \end{cases} \quad (1)$$

まず、段階 i の期末在庫量について、期間 t での値 $S_t^{(i)}$ と期間 $t-1$ での値 $S_{t-1}^{(i)}$ との間には次式の関係が成立する。

$$S_t^{(i)} = S_{t-1}^{(i)} + X_t^{(i)} - Y_t^{(i)} = S_{t-1}^{(i)} + Y_{t-L_i}^{(i+1)} - Y_t^{(i)} \quad (2)$$

各段階において安全在庫量が適切な値に設定され、チェーンのいずれでも在庫切れの状況が起きていない場合、式(2)は次式のように書き換えられる。

$$S_t^{(i)} = S_{t-1}^{(i)} + D_{t-L_i}^{(i+1)} - D_t^{(i)} = S_{t-1}^{(i)} + Q_{t-L_i-1}^{(i)} - D_t^{(i)} \quad (3)$$

つぎに、段階 i の期間 t での発注量 $Q_t^{(i)}$ は、目標在庫レベルと有効在庫量の差として次式に従い求める。

$$Q_t^{(i)} = \left((L_i + 1) \hat{D}_t^{(i)} + SS^{(i)} \right) - \left(S_t^{(i)} + \sum_{k=1}^{L_i} Q_{t-k}^{(i)} \right) \quad (4)$$

本論文では安全在庫量 $SS^{(i)}$ は一定値としており、式(3)と式(4)を用いて $S_t^{(i)}$ と $SS^{(i)}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} Q_t^{(i)} &= (L_i + 1) \left(\hat{D}_t^{(i)} - \hat{D}_{t-1}^{(i)} \right) + D_t^{(i)} \\ &= \begin{cases} (L_1 + 1) \left(\hat{D}_t^{(1)} - \hat{D}_{t-1}^{(1)} \right) + d_t & (i = 1) \\ (L_i + 1) \left(\hat{D}_t^{(i)} - \hat{D}_{t-1}^{(i)} \right) + Q_{t-1}^{(i-1)} & (i \geq 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。この式(5)における需要予測値 $\hat{D}_t^{(i)}$ の算出方法が2つのモデルで異なる。これについては2.4で述べる。

2.4 情報分散型のモデル

情報分散型モデルでは、段階 i の期間 t での需要予測値 $\hat{D}_t^{(i)}$ として、直近 p_i 期分の需要量の移動平均を用いるものとする。すなわち、以下の式により求める。

$$\hat{D}_t^{(i)} = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} D_{t-k+1}^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{p_1} \sum_{k=1}^{p_1} d_{t-k+1} & (i=1) \\ \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} Q_{t-k}^{(i-1)} & (i \geq 2) \end{cases} \quad (6)$$

式(5)と式(6)を組み合わせると、情報分散型の段階 i の発注量は、

$$Q_t^{(i)} = \left(1 + \frac{L_i + 1}{p_i}\right) D_t^{(i)} - \frac{L_i + 1}{p_i} D_{t-p_i}^{(i)} \quad (7)$$

と求めることができる。式(1)の関係を考慮すると、段階1での発注量の計算式は次式のようにになる。

$$Q_t^{(1)} = \left(1 + \frac{L_1 + 1}{p_1}\right) d_t - \frac{L_1 + 1}{p_1} d_{t-p_1} \quad (8)$$

また、段階2での発注量計算式は次式のようにになる。

$$Q_t^{(2)} = \left(1 + \frac{L_2 + 1}{p_2}\right) Q_{t-1}^{(1)} - \frac{L_2 + 1}{p_2} Q_{t-p_2-1}^{(1)} \quad (9)$$

2.5 情報中央集権型（情報共有型）のモデル

情報中央集権型（情報共有型）型では、全ての段階 i が、期間 t での需要予測値 $\hat{D}_t^{(i)}$ として直近 p_i 期分の最終需要量の移動平均を用いるものとする。すなわち、各段階とも、次式に従って算出する。

$$\hat{D}_t^{(i)} = \frac{1}{p_i} (d_{t-p_i+1} + d_{t-p_i+2} + \dots + d_{t-1} + d_t) = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} d_{t-k+1} \quad (10)$$

段階1については情報分散型と同じものとなる。

式(5)と式(10)を組み合わせると、情報中央集権型（情報共有型）型の段階 i の発注量の計算式は次式のように求められる。

$$Q_t^{(i)} = \frac{L_i + 1}{p_i} (d_t - d_{t-p_i}) + D_t^{(i)} \quad (11)$$

式(1)の関係を考慮すると、段階1の発注量計算式は次式のようにになる。

$$Q_t^{(1)} = \left(1 + \frac{L_1 + 1}{p_1}\right) d_t - \frac{L_1 + 1}{p_1} d_{t-p_1} \quad (12)$$

式(12)は情報分散型での式(8)と同一である。段階2の発注量の計算式は次式のようにになる。

$$Q_t^{(2)} = \frac{L_2 + 1}{p_2} (d_t - d_{t-p_2}) + Q_{t-1}^{(1)} \quad (13)$$

2.6 両モデルの振る舞いのシミュレーション例

3段階のチェーンについて、基準パラメータとして各段階のリードタイム $L=3$ 、移動平均の期間 $p=4$ と設定し、最終需要量として平均1000、標準偏差100の正規乱数系列を与えた場合のシミュレーションを行った。

Fig. 3に情報分散型モデルについてのシミュレーション結果を示す。各段階の発注量のばらつきがチェーンを上流側ほど大きくなっており、ブルウィップ効果が発生していることが判る。

情報分散型モデルでは、最終需要量の分散 $Var[d_t]$ と、段階 i の発注量の分散 $Var[Q_t^{(i)}]$ との間には、次式に示す関係が成り立つことが知られている。

$$\frac{Var[Q_t^{(i)}]}{Var[d_t]} = \prod_{k=1}^i \left(1 + 2 \frac{L_k + 1}{p_k} + 2 \left(\frac{L_k + 1}{p_k}\right)^2\right) \quad (14)$$

式(14)から、情報分散型モデルでは最終需要量の変動は積の形で増幅されることが判る。

つぎに、Fig. 4に情報中央集権型モデルのシミュレーション結果を示す。Fig.3と比較して、発注量のばらつきが増幅されるスピードが小さくなっており、ブルウィップ効果が大幅に低減されていることが判る。

情報中央集権型モデルでは次式の関係が成り立つことが知られている。

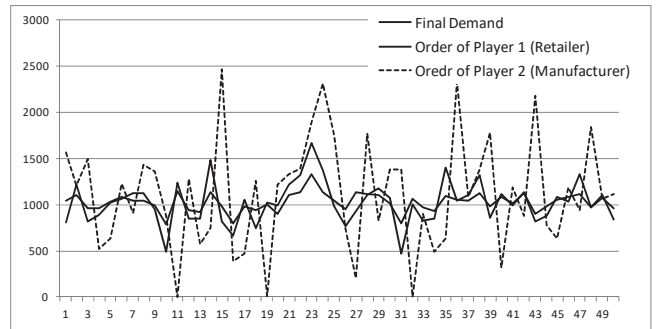


Fig. 3 Order Patterns of Player 1 and Player 2 of Decentralized Model ($L=3, p=4$)

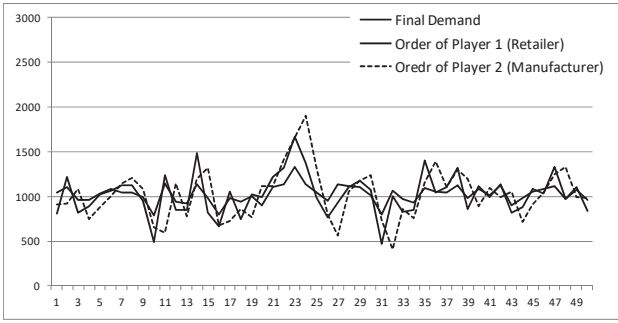


Fig. 4 Order Patterns of Player 1 and Player 2 of Centralized Model ($L=3, p=4$)

$$\frac{\text{Var}[Q_t^{(i)}]}{\text{Var}[d_t]} = 1 + 2 \frac{L_k + 1}{p_k} + 2 \sum_{k=1}^i \left(\frac{L_k + 1}{p_k} \right)^2 \quad (15)$$

式(15)から、情報共有型モデルでは、最終需要量の変動は和の形で増幅されるに過ぎないため、情報共有型ではブルウィップ効果を大幅に抑制できることが判る。

3. 下流側段階の需要量推定により間接的に情報共有を行うモデルの提案

ブルウィップ効果を低減するための手段として最終需要情報を共有することが有効であることを述べた。しかし、現実のサプライチェーンでは異なる企業グループから構成されるチェーンが多く存在する。このような場合、ひとつの企業グループからなるチェーンと異なり、需要情報の共有を行うのが困難であることも少なくない。

本論文では、情報共有を行うことが難しいサプライチェーンを想定し、そのようなチェーンにおいてブルウィップ効果を低減させる方法を検討する。情報共有に必要な情報は最終需要情報である。小売業者が卸売業者に発注した発注情報をもとに小売業者の需要量（顧客の最終需要量）を推定することで、間接的に情報共有を行うモデルを提案する。

3.1 提案モデルの方式概要

情報中央集権型モデルで、段階2が段階3への発注量 $Q_t^{(2)}$ を決定する際に必要な情報は最終需要量 d_t の情報である。もしも、段階2が段階1から受け取った発注量 $D_t^{(2)} (= Q_t^{(1)})$ の情報から最終需要量を推定することが可能であるならば、段階2は最終需要量 d_{t-1} の推定値 \tilde{d}_{t-1} を用いて需要予測を行い、それをもとに段階3への発注量 $Q_t^{(2)}$ を決定することができる。Fig. 5は提案モデルの情報の流れとももの流れを示したものである。

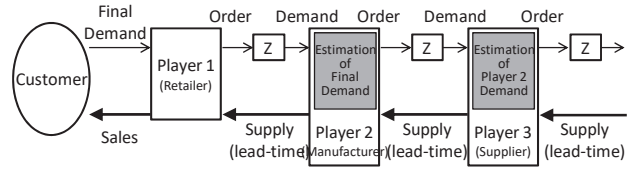


Fig. 5 Proposed Model (Sharing Demand Information Indirectly)

提案モデルでは、段階2は期間 t において以下のステップにしたがい行動し、発注量を決定する。

- (1) 段階2は、需要量 $D_t^{(2)}$ ($=$ 段階1の発注量 $Q_{t-1}^{(1)}$) から段階1の需要量すなわち最終需要量 d_{t-1} の推定を行う（推定値を \tilde{d}_{t-1} とする）
- (2) 段階2は、ステップ(1)で求めた最終需要量の推定値 \tilde{d}_{t-1} を用いて需要予測を行う
- (3) 段階2は、ステップ(2)で求めた需要予測値 $\hat{D}_t^{(2)}$ を用いて段階3への発注量を決定する

段階1については、情報分散型モデル、情報中央集権型モデルと同一である。異なるのは、段階2の処理である。段階2において、段階1から受けた発注量をもとに最終需要量を推定するステップ(1)を追加することが提案モデルの特徴である。

情報分散型モデルでは、段階1から受けた発注量を用いて需要量を予測し段階3への発注量を決定していたためブルウィップ効果を引き起こしていた。これに対し、情報中央集権型モデルでは、段階1から受けた発注量でなく最終需要情報を用いて需要予測することで精度の高い需要予測を行うことでブルウィップ効果を低減できていた。

これらに対し、提案モデルでは、情報分散型モデルのように段階1から受けた発注量をそのまま用いるのではなく、段階1からの発注情報をもとに最終需要量を推定するステップを付加することで、推定した最終需要情報を用いることで間接的な需要情報の共有を行うおうとする。

最終需要量の推定値からの需要予測値の算出は次式により行われる。

$$\hat{D}_t^{(2)} = \frac{1}{p_2} \sum_{k=1}^{p_2} \tilde{d}_{t-k} \quad (16)$$

3.2 下流側段階の需要量の推定方法

提案モデルのステップ(3)での最終需要量の推定について詳しく述べる。段階1の小売業者は、段階2の卸売業者に、式(4)を用いて発注している。段階1については式(17)のようになる。

$$D_t^{(2)} = \left(1 + \frac{L_1 + 1}{p_1}\right) d_{t-1} - \frac{L_1 + 1}{p_1} d_{t-p_1-1} \quad (17)$$

式(17)において、 t の代わりに $t-p_1$ とすると、

$$D_{t-p_1}^{(2)} = \left(1 + \frac{L_1 + 1}{p_1}\right) d_{t-p_1-1} - \frac{L_1 + 1}{p_1} d_{t-2p_1-1} \quad (18)$$

が得られる。同様に t の代わりに $t-2p_1$ とすると、

$$D_{t-2p_1}^{(2)} = \left(1 + \frac{L_1 + 1}{p_1}\right) d_{t-2p_1-1} - \frac{L_1 + 1}{p_1} d_{t-3p_1-1} \quad (19)$$

が得られる。まず、式(17)と式(18)から、 d_{t-p_1-1} を消去した等式を求める。つぎに、求めた等式と式(19)から、 d_{t-2p_1-1} を消去した等式を求める。この操作を無限に繰り返すと、期間 $t-1$ での需要量 d_{t-1} のみが残るような等式を最終的に得ることができる。これを整理すると、段階1の過去の発注量の系列から段階1の期間 t の需要量を逆算する以下のような推定の式を得ることができる。

$$d_{t-1} = \left(\frac{p_1}{p_1 + L_1 + 1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{L_1 + 1}{p_1 + L_1 + 1}\right)^k D_{t-kp_1}^{(2)}\right) \quad (20)$$

段階2では、段階1から受けた発注量と段階1における移動平均の期間 p ならびにリードタイム L の値が判れば、式(20)を用いて最終需要量の推定が可能となる。移動平均期間 p は、段階1が需要予測する際に用いるパラメータであり、段階2は知らない情報である。リードタイム L は、段階2が発注を受けて、段階1に商品を送り、到着するまでの時間であるので、段階2は知っている情報である。

ただし、式(20)は、段階1から受けた過去の発注量をすべて遡る形の無限級数となっており、まじめにこれを計算することはできない。また、式(19)では、発注量にかかる係数が $(L_1 + 1)/(p_1 + L_1 + 1)$ の累乗となっており、過去のデータほど0に近づく。すなわち過去に遡るほど影響は小さく無視できるものになる。そこで、有限個の過去の発注量を用いる以下の式(20)を用いて近似計算を行うことを考える。

$$\tilde{d}_{t-1} = \left(\frac{p_1}{p_1 + L_1 + 1}\right) \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{L_1 + 1}{p_1 + L_1 + 1}\right)^k D_{t-kp_1}^{(2)}\right) \quad (21)$$

4. 数値実験による提案モデルの評価

4.1 実験の概要

まず、式(21)を用いて最終需要量の推定が可能であるかを検証する実験を行った。基準パラメータとして $L=3$, $p=4$ とし、最終需要量として平均1000、標準偏差100の正規乱数系列を与えた。実験では、式(21)において $n=1, 2, 3$ とし、200期間に亘るシミュレーションを行って最終需要量を推定した。なお、段階1の移動平均期間 p は本来は段階2が知り得ない情報であるが、ここでは既知であると仮定した。

つぎに、最終需要量の推定値を用いることにより間接的に最終需要情報の共有を行う提案モデル、そして、実際に最終需要情報を共有する情報中央集権型モデル、情報共有を行わない情報分散型モデルの3つのモデルについて、ブルウィップ効果の発生状況をシミュレーション実験により検証した。

4.2 下流側段階の需要量の推定

Fig. 6は、式(21)を用いて最終需要量を推定した結果のグラフである。式(21)では、 n の値が大きいほど、より過去の発注量の情報まで用いて推定することを意味している。グラフを見ると、 $n=1, 2, 3$ のすべてのケースで、最終需要量の推定結果の形状と実際の最終需要量の形状はほぼ一致している。そして、 n が大きくなるにつれて、上方にスライドしながら実際の最終需要量に近づいている。このことから、 n の値を大きくするほど精度よく最終需要量を推定できるものと推測される。

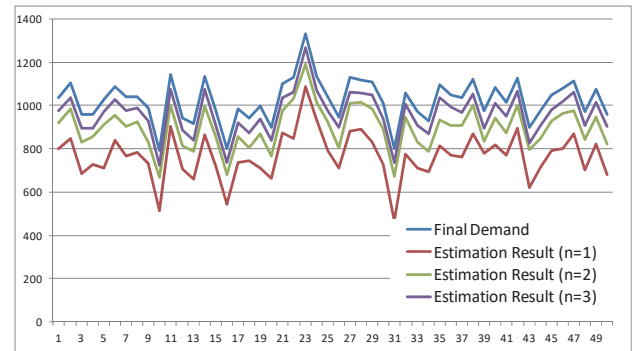


Fig. 6 Estimation of Final Demand Quantities ($L=3$, $p=4$)

Table 1 Estimation of Final Demand Quantities ($L=3$, $p=4$)

n	Average of Estimated Values	Standard Deviation	Estimation Error (RMS)
1	758.5	101.8	253.8
2	885.0	98.6	126.8
3	948.2	98.8	63.3
∞	1011.2	97.7	0

Table 1に、200期間分の最終需要量の推定値の平均と推定誤差（RMS：二乗平均平方根）を示す。この表から、 $n=3$ としたときには誤差が約6%の精度で推定できていることが判る。すなわち、本実験で用いた基本パラメータについては $n=3$ で十分であると考えられる。ただし、移動平均期間 $p=4$ であるならば、 $n=3$ の場合では12期前までさかのぼった発注量の情報を用いる必要があることになる。一方、 $n=1$ であれば4期前までさかのぼればよいのであるが、推定誤差は約25%になってしまう。

つまり、式(21)を用いると、大きくさかのぼる事が出来れば最終需要量を推定することが可能であると言えるが、現実的に、それは難しいと考える。また、短い期間しかさかのぼらなかつた場合は、最終需要量よりも小さく需要量を見積もってしまうという問題点があげられる。

この問題は、式(21)では $(L_1+1)/(p_1+L_1+1)$ を過去の発注量そのものにかけていることに起因する。そこで、最終需要量の平均を μ とする。 μ が既知であると仮定して、 μ からのずれの分だけを乗じることにした以下の修正式を用いる。

$$\tilde{d}_{t-1} = \left(\frac{p_1}{p_1 + L_1 + 1} \right) \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{L_1 + 1}{p_1 + L_1 + 1} \right)^k (D_{t-kp_1}^{(2)} - \mu) \right) + \mu \quad (22)$$

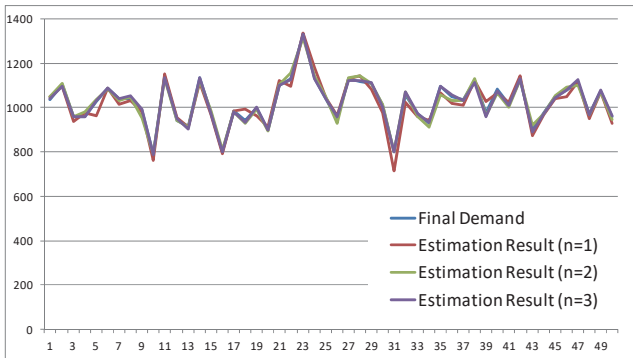


Fig. 7 Estimation of Final Demand Quantities ($L=3, p=4$) in Case that Mean μ is Known

Table 2 Estimation of Final Demand Quantities ($L=3, p=4$) in Case that Mean μ is Known

n	Average of Estimated Values	Standard Deviation	Estimation Error (RMS)
1	1008.5	101.8	24.3
2	1010.0	98.6	12.1
3	1010.7	98.8	6.0
∞	1011.2	97.7	0

Fig. 7は、式(22)を用いて最終需要量を推定した結果のグラフである。グラフから、 $n=1, 2, 3$ のすべてのケースで推定結果が実際の最終需要量とほぼ一致していることが判る。Table 2に、200期間分の最終需要量の推定値の平均と推定誤差を示す。表を見ると、すべてのケースで誤差3%以下の精度で推定できており、式(21)を用いた場合に比べて大幅に推定精度を向上できている。式(22)を用いることで、 $n=1$ あるいは $n=2$ ならば、4期前あるいは8期前までの発注量情報を用いることで最終需要量の推定が可能であり、最終需要量を小さく推定してしまうという問題点を解決できる。

4.3 提案モデルにおけるブルウィップ効果の低減

本節では、式(11)を用いて算出した最終需要量の推定値を用いることにより間接的に最終需要情報の共有を行うという提案モデル、そして、実際に最終需要情報を共有する情報中央集権型モデル、情報共有をしない情報分散型モデルの3つのモデルについて、ブルウィップ効果の発生状況をシミュレーション実験により検証する。

式(21)を用いた提案モデルがどの程度ブルウィップ効果の低減に有効であるかを確認する。なお、式(21)を用いるため、最終需要量の平均 μ は本来は段階2が知るはずのない情報であるが、平均 μ が既知であると仮定して実験を行う。また、移動平均期間 p は既知であると仮定する。

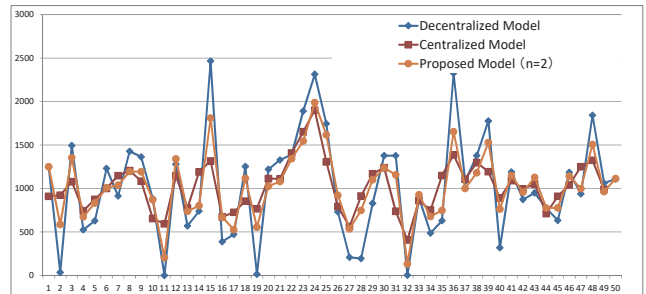


Fig. 8 Simulation Results of Three Models ($L=3, p=4$) (Order Pattern of Player 2 on Each Model)

Table 3 Amplification of Order Quantity of Three Models (Ratio of Order Standard Deviations) ($L=3, p=4$)

	$\sqrt{\frac{\text{Var}[Q_t^{(1)}]}{\text{Var}[d_t]}}$	$\sqrt{\frac{\text{Var}[Q_t^{(2)}]}{\text{Var}[Q_t^{(1)}]}}$
Decentralized Model	2.21	2.51
Centralized Model		1.10
Proposed Model ($n=2$)		1.61

基準パラメータは、第5節での実験と同様に、最終需要量として平均 $\mu=100$ 、標準偏差10の正規乱数系列を与えた。移動平均期間 $p=5$ 、リードタイム $L=4$ とする。最終需要量の推定結果には式(21)で $n=2$ を用いたときの結果を用いる。2段階の直列型サプライチェーンについて、100期間の実験を行った。

Fig. 8は、本論文の提案モデル、情報中央集権型モデル、情報分散型モデルのブルウィップ効果の発生状況を調べるために、3つのモデルの段階2の発注量を比較したグラフである。グラフを見ると、提案モデルは情報共有型モデルとほぼ一致していることがわかる。情報分散型モデルに比べて発注量の変動は小さく抑えることができている。ブルウィップ効果の低減に有効であることが確認できる。また、Table 3に示すように、3つのモデルにおける発注量の標準偏差（ばらつき）の比（増幅率）を見ても、提案モデルと情報中央集権型では、値がほぼ等しい。最終需要量の平均、移動平均期間の値が既知である場合、提案モデルは情報中央集権型モデルと同様にブルウィップ効果の低減に有効であることが確認できた。

5. おわりに

本研究では、サプライチェーン内で最終需要情報の共有が困難である場合に、チェーン内で発生するブルウィップ効果を低減させる方策を検討し、この方策を組み込んだチェーンのモデル提案した。小売業者が卸売業者に発注した数値をもとに消費者の最終需要量を推定することで、間接的な情報共有を実現する（近似する）モデルを提案した。情報共有をしない情報分散型モデル、情報共有を行う情報中央集権型モデル、そして、提案モデルの各モデルでシミュレーション実験を行い、それぞれブルウィップ効果の発生状況と低減効果を比較・評価した。

提案モデルでは、段階1の移動平均期間 p の値と、最終需要量の平均の値が既知であるならば、ほぼ正確に最終需要量を推定することが可能であった。推定した最終需要量を用いることで、情報中央集権型モデルに近いレベルでブルウィップ効果を低減できることを確認した。

本研究では、下流側の段階での需要予測方法を移動平均法に固定し、移動平均計算期間や最終需要量の平均が既知であるとするなど、現実とは異なるような仮定をいくつか置いている。今後の課題として、前段階での需要予測方法が指数平滑法であるなど、条件を緩めて検討する必要がある。また、3段階以上のチェーンについて考える必要がある。

参考文献

- 1) 森田道也：「サプライチェーンの原理と経営」，新世社，2004
- 2) H. Lee, V. Padmanabhan and S. Whang: "Information Distortion in a Supply Chain: The Bullwhip Effect," *Management Science*, Vol.43, No.4, pp.546-558, 1997
- 3) F. Chen, Z. Drenzer, J. Ryan and D. Levi: "Quantifying the Bullwhip Effect in a Simple Supply Chain: The Impact of Forecasting, Lead Times, and Information," *Management Science*, Vol.46, No.3, pp.436-443, 2000
- 4) 久保幹雄：「ロジスティクス工学」，朝倉書店，2001
- 5) 鈴木定省，三島 理，圓川隆夫："定期発注方式を用いたサプライチェーンにおけるブルウィップ効果の定量化に関する研究"，日本経営工学会論文誌，Vol.56, No.3, pp.148-154, 2005
- 6) 狭間雅義，宋 宇："ブルウィップ現象に影響を与える要素の特定"，日本経営工学会論文誌，Vol.58, No.2, pp.106-114, 2007
- 7) 水野浩孝，森山弘海，羽田隆男："定期発注方式を採用したサプライチェーンにおいてロット発注がブルウィップ効果に及ぼす影響の定量評価"，日本ロジスティクスシステム学会誌，Vol.10, No.1, pp. 13-20, 2010
- 8) 水野浩孝，森山弘海，羽田隆男："最終需要情報共有型のサプライチェーンにおける非正常状態でのブルウィップ効果の分析"，日本経営システム学会誌，Vol.29, No.3, pp. 191-200, 2013
- 9) 齊藤史哲："在庫に関する知識共有のブルウィップ効果に及ぼす影響について - 在庫シミュレーションモデルの提案と検証 -"，日本経営工学会論文誌，Vol.66, No.1, pp.40-48, 2015

大型ディスプレイにおけるハンドジェスチャによるポインティング 操作に関する研究

-ポインティング操作への Fitts の法則の適用について-

松山 周平*¹, 辛島 光彦*²

A Study on Characteristics of Hand Gesture Pointing Operation on Large Monitor -Application of Fitts' Law to Hand Gesture Pointing Operation-

by

Shuhei MATSUYAMA*¹ and Mitsuhiko KARASHIMA*²

(received on Sep. 27, 2019 & accepted on Nov. 15, 2019)

あらまし

本論文は、大型ディスプレイにおけるハンドジェスチャによるポインティング操作に2次元GUIに拡張されたFittsの法則を、マウスと同程度に適用できる条件を実験を通じて検討した。ジェスチャ操作の実操作距離を変化させた実験の結果、小型ディスプレイでは小さい実操作距離でジェスチャ操作にも拡張Fittsの法則をマウスと同程度に適用できる可能性が示唆された。しかし大型ディスプレイでは同様の実操作距離で位置決め操作が困難となり、拡張Fittsの法則を適用できないことが示唆された。これらの実験結果及び従来の研究から、大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に拡張Fittsの法則をマウスと同程度に適用できる条件を見出すことは困難であることが示唆された。

Abstract

This research focused on the conditions that the expanded Fitts' law could be applied to the hand gesture pointing operation on the large monitor through two experiments. The results revealed that the short control length of the hand gesture led to the high application of Fitts' law to the hand gesture on the small monitor. On the large monitor, however, this control length did not lead to the application of Fitts' law to the hand gesture. It was suggested that there were few conditions that the expanded Fitts' law could be applied to the hand gesture on the large monitor.

キーワード: ハンドジェスチャ, 2次元GUI, ポインティング操作時間, Fittsの法則

Keywords: Hand Gesture, Two-Dimensional GUI, Pointing Operation Time, Fitts' Law

1. はじめに

近年、2次元GUI(Graphical User Interface)の新しい操作方法として、身振り、手振りに代表される3次元空間におけるハンドジェスチャによる操作方法が提案されている。ハンドジェスチャによる操作は身体的な動きを伴い、直感的な操作ができることやデバイスを持たずに離れた位置から操作ができることから、大型ディスプレイとの相性が良いといった利点が挙げられている¹⁾。従来研究においては、マウスによる操作についてポインターをターゲットに移動させクリックする操作(ポインティング操作)に要する時間とポインティング操作の困難度IDとの関係へFittsの法則²⁾を2次元GUIに拡張した回帰モデル(拡張Fittsの法則)

を適用できることが明らかにされている³⁾。また、ノートパソコンの小型ディスプレイにおけるハンドジェスチャによるポインティング操作(ジェスチャ操作)についても、マウスによるポインティング操作(マウス操作)と同様に操作時間と困難度IDの関数に拡張Fittsの法則を適用できることが明らかにされている⁴⁾。しかしながら、大型ディスプレイ(58inch)上におけるジェスチャ操作については、マウス操作と比較し、操作時間と困難度IDの関数には必ずしも拡張Fittsの法則を適用できるとはいえず、操作時間がターゲットサイズから受ける影響が少ないことが示唆されている¹⁾。

そこで本研究では、大型ディスプレイのようにディスプレイ範囲が広範な場合のジェスチャ操作に要する時間と困難度IDとの関係に拡張Fittsの法則を適用できる条件について実験を通じて検討した。

2. ジェスチャ操作と拡張 Fitts の法則

MacKenzie(1992)は、2次元GUIにおけるマウス操作において、ターゲットサイズ W とポインター移動距離 D のとき、ポインティング操作の困難度IDはFittsの法則を拡張する形で式(1)のように表され、マウス操

*1 情報通信学研究科情報通信学専攻 修士課程
Graduate School of Information and
Telecommunication Engineering, Course of
Information and Telecommunication
Engineering, Master's Program

*2 情報通信学部経営システム工学科 教授
School of Information and Telecommunication
Engineering, Department of Management
Systems Engineering, Professor

作に要する時間MTはデータより導き出される回帰式(2)のように表され、0.8以上の高い寄与率で適用できることを示している。

$$ID = \log_2 \left(\frac{D}{W} + 1 \right) \quad (1)$$

$$MT = a + b \times ID \quad (a, b \text{は定数}) \quad (2)$$

ジェスチャ操作については、Burunoら(2015)⁴⁾の研究では、ノートパソコンの小型ディスプレイにおける操作時間と困難度IDの関係には、マウス同様に寄与率0.857~0.984で拡張Fittsの法則を適用できることが示されている。また大型ディスプレイ(50inch)を用いているが、ディスプレイ上のカーソルの移動距離を0.1,0.2mとしており小型ディスプレイの場合の操作条件と同様になっている中村ら(2016)⁵⁾の研究では、ジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に寄与率0.83で拡張Fittsの法則を適用できることが示唆されている。一方19inchのディスプレイを視距離2m程度で用いたPinoら(2013)⁶⁾の研究では、ジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に寄与率0.510で拡張Fittsの法則を必ずしも適用できるとはみなせないことが示唆されている。また森山ら(2015)¹⁾の研究でも、視距離2mで大型ディスプレイ(58inch)上におけるジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に寄与率0.424で拡張Fittsの法則を必ずしも適用できるとはみなせないことが示唆されている。このように従来の研究においては、ノートパソコンのディスプレイのような小型ディスプレイのディスプレイ範囲におけるジェスチャ操作については操作時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を適用できるのに対して、大型ディスプレイのようにディスプレイ範囲が広範で視距離が長くなると、ジェスチャ操作の時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を必ずしも適用できるとはみなせないことが示唆されている。

この大型ディスプレイ上におけるジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を必ずしも適用できるとはみなせない原因を明らかにするために、Matsuyamaら(2017)⁷⁾は、大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作とマウス操作について実験を通じて比較検討したところ、両者のポインターの速度波形の様相に明らかな相違を見出している。ジェスチャ操作におけるポインターの速度波形の様相は、朝日ら(2008)のマウス操作の速度波形の様相に関する研究⁸⁾におけるポインターの移動量に対する操作量の比(以下CD比)が1と大きい際の特徴と酷似し、最高速度の出現時刻が遅くなり、再加速が見られない傾向が示唆されている。この結果を踏まえMatsuyamaら(2017)⁷⁾は、従来ジェスチャ操作においてはCD比=1としていることが一般的であることから、CD比=1の場合と、朝日ら(2008)⁸⁾がマウスに適切としたCD比=0.125とした場合の大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に要する時間について比較検討し、Fig.1に示すようにCD比=0.125の場合の方がCD比=1の場合と比較し、操作時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を適用できることを示唆している。しかし適用できる程度を表す回帰式の寄与率は依然マウス操作と比較すると十分ではないことも示唆している。このこ

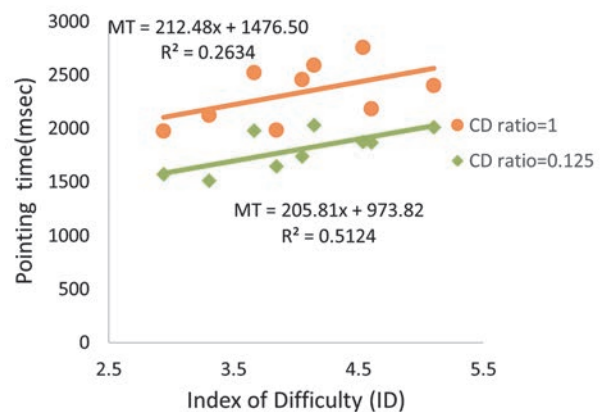


Fig.1 Relation between ID and Pointing time

とからジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を必ずしも適用できるとはみなせない原因は、CD比だけに帰着することはできず、十分に解明されているとは言えない。

ノートパソコンのディスプレイのような小型ディスプレイと大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作を比較すると、一般的にディスプレイまでの視距離は3H(Hはディスプレイ縦幅)が標準的であり、両視距離においては、ディスプレイ縦横比が同一ならば、同様の視角を維持することは可能となる。その意味では視覚的には小型ディスプレイと大型ディスプレイでは視距離以外に相違が生じることを避けることはある程度可能であると考えられる。一方両者において同一のCD比を用いた場合には、ジェスチャ操作の操作量(実操作距離)は視距離が大きいほど大きくなることから、実操作距離は視距離により決定されるとみなすことができる。このように小型ディスプレイと大型ディスプレイのジェスチャ操作に影響を与える可能性がある要因として視距離の相違による実操作距離の相違の影響が挙げられる。

3. 実験

3.1 実験概要

前述のように小型ディスプレイと大型ディスプレイのジェスチャ操作に影響を与える可能性がある要因として視距離の相違による実操作距離の相違の影響が挙げられる。そこで実操作距離として①従来の大型ディスプレイの実操作距離(0.213~0.513m(CD比=1)), ②小型ディスプレイの実操作距離(0.053~0.133m(CD比=1)), 加えて朝日(2008)⁸⁾の示した適切なCD比の範囲(0.125~0.25)を用いた③小型ディスプレイにおける実操作距離(0.0133~0.333m(CD比=0.25))を取り上げ、3者のジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係について、拡張Fittsの法則を適用できる程度を比較検討した。

3.2 被験者

利き手が右手の20~24歳の健常大学生23名を被験者とした。被験者には実験の目的、方法およびデータの処理方法に関する説明を実験前に行い、実験の参加

への同意を得た。本実験は東海大学「人を対象とする研究」に関する倫理委員会の審査を受け、承認された(承認番号 16187(2017))。

3.3 実験作業

ISO/TS 9241-411⁹⁾を基とした多方向タッピング操作課題を実験作業とした。被験者には Fig.2 に示すように円周上に等間隔に配置された 15 点のターゲットのうち、赤色に点灯したターゲットに番号順にポインターを移動していくことによりポインティングする作業(多方向のタッピング作業)を、後述の困難度 ID 毎に 2 周してもらった。

なおジェスチャ操作ではマウスにおけるクリックに相当する操作が困難なため、ポインターをターゲット上に 2sec の静止させることによってポインティングを行うウェイトイング法を採用した。視覚的フィードバックとして次のターゲットが点灯することによりクリックが完了したことを被験者が認識できるようにした。

また被験者のジェスチャ操作は、右手に反射マーカを装着させ、反射マーカ的位置座標を赤外線カメラを用いたシステム(ノビテック製 VENUS 3D モーションキャプチャシステム)により 10msec のサンプリング間隔で計測し、ディスプレイ面と平行な面上の反射マーカの 2 次元の位置座標とディスプレイ内のポインターの位置座標を自作のソフトウェアによって連動させることにより実現した。

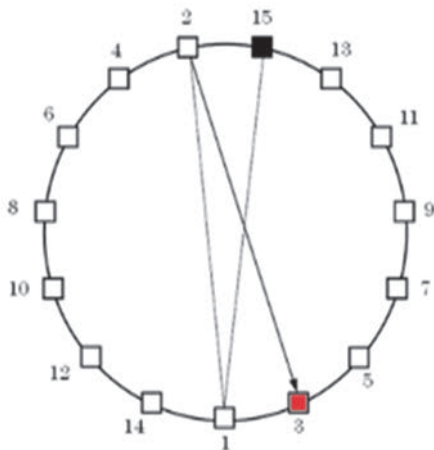


Fig.2 Experimental task

3.4 実験条件

本実験では 3 種の実操作距離条件(① 0.213 ~ 0.513m(CD 比=1), ② 0.053 ~ 0.133m(CD 比=1), ③ 0.0133 ~ 0.0333m(CD 比=0.25))を用意した。

①の実操作距離の場合は大型ディスプレイを想定していることから、視距離(VD)を 2m とした。Table1 に示すように、ターゲットサイズ(W px)とポインター移動距離(D px)を 3 通りずつ用意し、拡張 Fitts の法則に基づく式(1)から 9 パターンの困難度 ID を求めた。

また②の実操作距離の場合は、小型ディスプレイの実操作距離を想定していることから、視距離を 0.5m

とした。ターゲットサイズ(W' px), ポインター移動距離(D' px)は、Fig.3 に示すように Table1 のそれぞれの ID における視角(ターゲットサイズ θ , ポインター移動距離 ϕ)と同一とするためには、Table1 の各(W,D)に対して(W/4, D/4)としなければならないことから Table2 を用意した。③の実操作距離の場合は、①に対して実操作距離と CD 比の両者の変更を検討することから、②と同様に視距離 0.5m とし、Table2 を用いた。

Table 1 Patterns of Index of Difficulty

W(px)	D(px)	ID
48	320	2.939
48	560	3.663
48	800	4.143
36	320	3.306
36	560	4.049
36	800	4.537
24	320	3.841
24	560	4.605
24	800	5.102

Table 2 Patterns of Index of Difficulty

W'(px)	D'(px)	ID
12	80	2.939
12	140	3.663
12	200	4.143
9	80	3.306
9	140	4.049
9	200	4.537
6	80	3.841
6	140	4.605
6	200	5.102

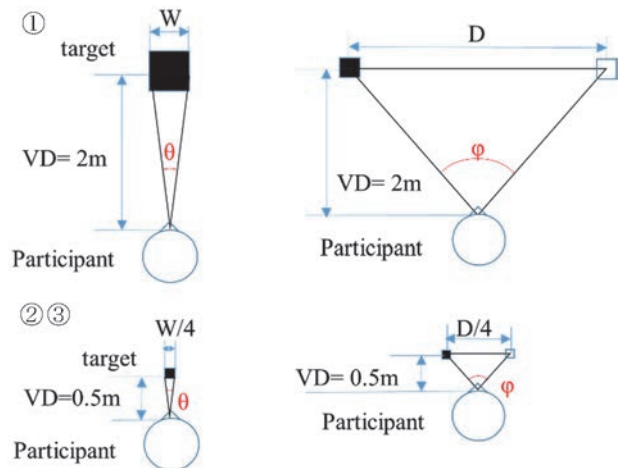


Fig.3 Relationship between visual distance and (W,D)

3.5 実験手順

本実験では前述の通り 3 種の実操作距離条件を用意したが、23 名の被験者中 12 名には①及び②の実操作距離について、11 名には①及び③の実操作距離について実験作業を行わせた。各被験者の 2 実操作距離の実施順序は順序効果を考慮し極力カウンターバランスをとるように配慮した。またそれぞれの実操作距離における 9 パターンの ID の実施順序についても順序効果を考慮し極力カウンターバランスをとるように配慮した。

被験者にはそれぞれの実操作距離条件において、ジェスチャ操作の練習として ID の最も高いパターンで実験作業を行わせた。その後 9 パターンの ID について実験作業を行わせた。腕や肩の疲労に配慮し各パターンの作業が終了するごとに 2 分間の休憩を設けた。

また実操作距離条件間においても疲労に配慮し 10 分間の休憩を設けた。

3.6 実験環境

①の実操作距離においては Fig.4 に示すように大型ディスプレイ (58inch, 1920px×1080px, Panasonic 製 TH-58PF12) を用いた視距離 2m のレイアウトで実験を行い, ②③の実操作距離においては視距離のみを 0.5 m に変更した同様のレイアウトで実験を行った。

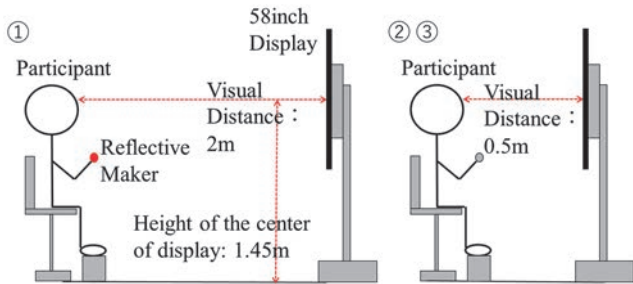


Fig.4 Experimental layout

3.7 測定項目

ターゲットが赤色に点灯してから, 被験者がそのターゲット内にポインターを移動させ, 2 秒間静止した時点までの時間から, 静止時間を引いた時間をジェスチャ操作に要する時間 MT(msec)として測定した。得られたデータは, ID 毎に有意水準 0.05 でスミルノフ・グラブス検定を行い, 異常値を除去した。また, 本実験において操作特性に関する指標については, Kopper らの遠距離からのポインティングについての研究¹⁰⁾ や森山ら(2015)の研究¹⁾と同様に全ての被験者の平均値を用いて議論することとした。

4. 実験結果

4.1 実操作距離条件①及び②の比較

Fig.5 に実操作距離条件①(0.213~0.513m, CD 比=1) と実操作距離条件②(0.053 ~0. 133m, CD 比=1) の場合のジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID の関係を示す。さらに①, ②における操作時間と困難度 ID の関係について回帰分析を行った結果として単回帰式を式(3),(4)にそれぞれ示す。

$$MT = 282.01 \times ID + 1041.25 \quad (3)$$

$$MT = 167.82 \times ID + 591.50 \quad (4)$$

またそれぞれの寄与率は 0.444, 0.653 であった。実操作距離条件①の場合は式(3)の ID の係数は有意でなく ($p > 0.05$), 寄与率も森山ら(2015)¹⁾の研究と同様であり操作時間と困難度 ID の関係に拡張 Fitts の法則を適用できるとはみなせなかった。一方実操作距離条件②の場合は式(4)の ID の係数は有意であり ($p < 0.01$), 寄与率も前述の Matsuyama ら(2017)の研究⁷⁾の場合よりも高く, 拡張 Fitts の法則を適用できる可能性が有意に示された。このことからディスプレイのジェスチャ操作においては, CD 比=1 で同一であっても実操作距離が短い場合に拡張 Fitts の法則を適用しやすくなるこ

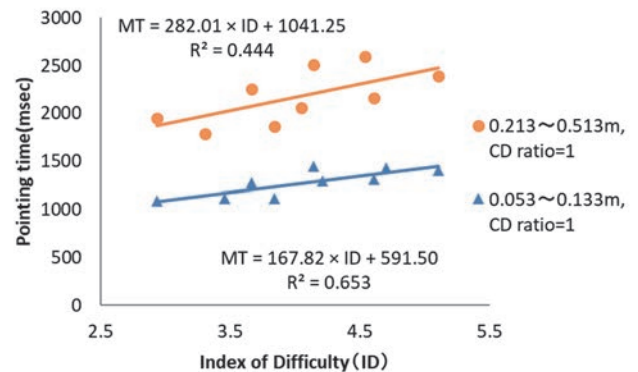


Fig.5 Relation between ID and Pointing time

とが示唆された。

4.2 実操作距離条件①及び③の比較

Fig.6 に実操作距離条件①(0.213~0.513m, CD 比=1) と実操作距離条件③(0.0133~0.0333m, CD 比=0.25) の場合のジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID の関係を示す。さらに①, ③における操作時間と困難度 ID の関係について回帰分析を行った結果として単回帰式を式(5),(6)にそれぞれ示す。

$$MT = 254.12 \times ID + 1055.80 \quad (5)$$

$$MT = 272.42 \times ID + 442.88 \quad (6)$$

またそれぞれの寄与率は 0.464, 0.802 であった。実操作距離条件①の場合は式(5)の ID の係数は有意であったが ($p < 0.05$), 寄与率は森山ら(2015)¹⁾の研究や式(3)と同様でありジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID の関係に拡張 Fitts の法則を必ずしも適用できるとはみなせなかった。一方実操作距離条件③の場合は式(6)の ID の係数は有意であり ($p < 0.01$), 寄与率も Matsuyama ら(2017)の研究⁷⁾の場合よりも高く, 拡張 Fitts の法則を適用できる可能性が有意に示された。さらに実操作距離条件②の場合よりも寄与率が高いことも示唆された。このことはディスプレイのジェスチャ操作においては, CD 比をマウスに適切な範囲の 0.25 とすることにより, 実操作距離条件②よりもさらに実操作距離を短くした場合に拡張 Fitts の法則を適用しやすく, 寄与率も 0.8 以上でマウスと同程度に適用できる可能性が示唆された。

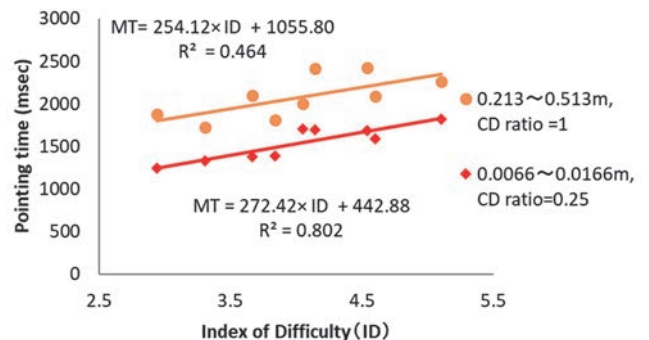


Fig.6 Relation between ID and Pointing time

5. 考察

実験結果より実操作距離条件①～③のジェスチャ操作においては、大型ディスプレイの視角条件を保った小型ディスプレイにおける CD 比をマウスに適切な 0.25 とし、視距離を短くすることにより実操作距離を最も短くした実操作距離条件③の場合に、操作時間と困難度 ID の関係に Fitts の法則をマウスと同程度に適用できることが示唆された。大型ディスプレイと小型ディスプレイの視角条件は同一に保たれていることから、この実験結果より大型ディスプレイにおいても、実操作距離を実操作距離条件③と同様に短くすることが、操作時間と困難度 ID の関係に拡張 Fitts の法則を適用できるために有効な条件であると期待される。

しかし、本実験における実操作距離条件②、③は小型ディスプレイを用いた場合の視角条件を大型ディスプレイと同一に保っているが、視環境としては、視距離が異なり当然のことながら全く同一なわけではない。そのため小型ディスプレイにおける拡張 Fitts の法則を適用できるために有効な条件が大型ディスプレイにおいても有効であることが保証されるわけではない。そこで適用条件の妥当性を検証するためには、大型ディスプレイでの有効性を確認する必要がある。実操作距離を実操作距離条件③と同様に定めた条件の大型ディスプレイでの有効性を実験を通じて検討することとした。

5.1 追加実験

(1) 実験概要

前述の実操作距離条件①と同様の視環境となる大型ディスプレイにおいて、実操作距離条件③と同様の実操作距離 0.0133～0.0333m となるように CD 比を定めた上で、前述の実操作距離条件①と同様の実験環境において、3.3 節の実験作業を行わせた結果から、前述の実操作距離条件③と同様の実操作距離においては、ジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID との関係に拡張 Fitts の法則を適用できるか否かを検討する。

(2) 被験者

3.2 節とは異なる利き手が右手の 20～27 歳の健康学生 9 名を被験者とした。

(3) 実験作業

被験者には 3.3 節の実験作業を全く同様のジェスチャ操作の方法で行わせた。

(4) 実験条件

大型ディスプレイにおいて、前述の実操作距離条件③と同様の実操作距離 0.0133～0.0333m となるように CD 比を 0.064 と定めた上で、Table1 に示す 9 パターンの困難度 ID について被験者にジェスチャ操作を行わせた。

(5) 実験手順

被験者には実験前にジェスチャ操作の練習として ID の最も高いパターンで実験作業を行わせた。また 9 パターンの実施順序については順序効果を考慮しカウンターバランスをとった。

(6) 実験環境

Fig.4 の左図に示す前述の実操作距離条件①と同様

の実験環境を用いた。

(7) 測定項目

3.7 節の測定項目と同様にジェスチャ操作に要する時間を測定するとともに、操作時間に関する指標については、全ての被験者の平均値を用いて議論することとした。

(8) 実験結果

Fig.7 にジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID の関係を示す。さらに操作時間と困難度 ID の関係について回帰分析を行った結果として単回帰式を式(7)に示す。

$$MT = 149.63 \times ID + 2344.86 \quad (7)$$

また寄与率は 0.084 であった。式(7)の ID の係数は有意ではなく ($p > 0.05$)、寄与率も明らかに小さく、拡張 Fitts の法則を明らかに適用できないことが示された。このことは小型ディスプレイにおいて拡張 Fitts の法則を適用できた実操作距離条件③と同様の実移動距離 0.0133～0.0333m となるように CD 比を 0.064 に定めた条件では、大型ディスプレイにおいて操作時間と困難度 ID の関係に拡張 Fitts の法則を適用するためには有効ではなく、CD 比=1 である実操作距離条件①の場合や CD 比=0.125 である Matsuyama ら(2017)⁷⁾の実験結果と比較しても、拡張 Fitts の法則を全く適用できないことが示唆された。

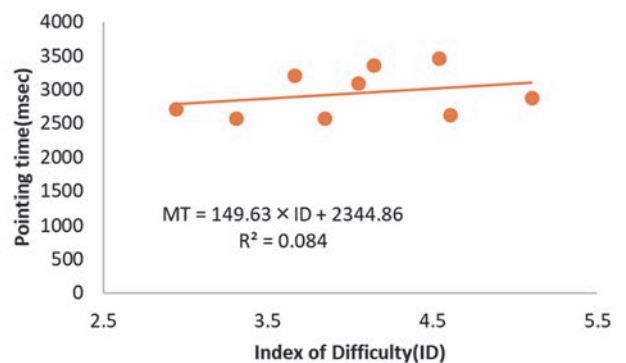


Fig.7 Relation between ID and Pointing time

(9) 実験考察

大型ディスプレイにおいては実移動距離 0.0133～0.0333m となるように CD 比を 0.064 に定めた条件では、拡張 Fitts の法則を適用できないことが示唆された。被験者群は異なるものの Fig.1, 5, 6, 7 の大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に要する時間を比較すると、例えば困難度 ID が一番小さい場合 (ID=2.939) では CD 比=1 では 2000msec 程度、CD 比=0.125 では 1500msec 程度であるのに対して、CD 比=0.064 では 2500msec 程度と時間を要した。CD 比=0.064 の際に時間を要してしまう可能性は、CD 比が小さい場合、実操作距離に対するポインタの移動距離が大きくなるため、ポインタをターゲットに合わせるための位置決め操作が困難となり、操作に時間を要する可能性が考えられる。そこで被験者は異なるものの、困難度 ID が一番小さい場合の前述の実操作距離条件①(CD 比=1)の場合のポインタの移動速度の様相と CD 比=0.064 の場合の移動速度の様相を比較して

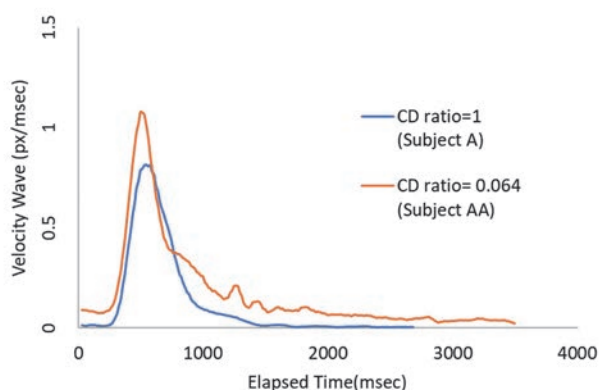


Fig.8 Velocity wave forms of the hand gesture at CD ratio = 1 and CD ratio = 0.064 (ID=2.939)

みる。Fig.8の例は、特定の被験者のFig.2の実験作業における29回のジェスチャ操作の際のポインターの移動速度の様相を平均化したものである。Fig.8に示すように、CD比=0.064の場合は、CD比=1の場合と比較し、移動操作相¹⁾では最大速度が大きくなる傾向を示し、位置決め操作相¹⁾の時間が長くなる傾向が示された。このことは、速度波形の様相からも、CD比=0.064の場合には本実験における最もターゲットサイズが大きい場合ですら位置決め操作が困難であるために位置決め操作に時間を要し、結果的にジェスチャ操作に要する時間が長くなることを示唆している。これらのことから小型ディスプレイにおいて拡張Fittsの法則を適用できた実操作距離条件③と同様の実移動距離0.0133~0.0333mとなるようCD比を0.064に定めた条件では、位置決め操作が困難となるため、位置決め操作に時間を要し、結果として大型ディスプレイにおいては、操作時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を適用できないと考えられる。

5.2 全体考察

本研究の実験結果からは、小型ディスプレイに相当する視距離0.5mの視環境においては、特にCD比をマウスに適切とされている範囲(0.125~0.25)の0.25とした場合に、ジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係について回帰分析を行った際の寄与率は0.8以上でマウスと同程度となることが示された。このことから従来の研究と同様に小型ディスプレイに相当する視距離0.5mの視環境においては、ジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則をマウスと同程度に適用できることが確認された。

一方大型ディスプレイに相当する視距離2mの視環境においては、ジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係について回帰分析を行った際の寄与率は、本研究の実験結果ではCD比=1の場合は0.444, 0.464, 森山ら(2015)¹⁾の場合と同様にマウスの場合と比較し必ずしも高い値とは言えず、操作時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則をマウスと同程度に適用できないことが確認された。またMatsuyamaら(2017)⁷⁾の研究では、CD比をマウスに適切とされている範囲中の0.125とした場合でも寄与率は0.5124であり、ジェ

スチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則をマウスの場合と同程度に適用できないことが示唆されている。さらに本研究では、大型ディスプレイと小型ディスプレイの視角条件は同一に保たれていることから、小型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を適用できると確認された実操作距離が、大型ディスプレイにおいても有効な条件であると期待されたため、その実操作距離となるようにCD比を0.064とした場合の大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係について回帰分析を行ったところ、その寄与率は僅か0.084となり、拡張Fittsの法則を全く適用できないことが示唆された。これは実操作距離を小さくしたことによりCD比が小さすぎるためにわずかな操作距離により、ポインターが大きく移動するために、位置決め操作が困難となり位置決め操作に時間を要したためであると推察された。以上のことから大型ディスプレイに相当する視距離2mの視環境においては、CD比を1からマウスに適切とされている範囲に小さくしてもジェスチャ操作に要する時間と困難度IDの関係に拡張Fittsの法則を適用できる程度はマウスほどには高くならず、さらにCD比を小さくすると、位置決め操作が困難となることから、全く拡張Fittsの法則を適用できないことが示唆され、拡張Fittsの法則をマウスと同程度に適用できる条件を見出すことは困難であると考えられる。

そこで森山ら(2015)¹⁾の提案したFittsの法則の困難度IDからWの影響を取り除いた式(8)、Table3のような困難度ID_{NEW}を用いて、本研究の実験で得られたCD比=1の場合のジェスチャ操作に要する時間と困難度ID_{NEW}の関係について回帰分析を行った結果として単回帰式を式(9)、(10)にそれぞれ示す。

Table 3 Patterns of New Index of Difficulty

D(px)	ID _{NEW}
320	8.322
560	9.129
800	9.644

$$ID_{NEW} = \log_2 D \quad (8)$$

$$MT = 467.34 \times ID_{NEW} - 2045.83 \quad (9)$$

$$MT = 414.05 \times ID_{NEW} - 1662.09 \quad (10)$$

それぞれの寄与率は0.893, 0.903(p<0.01)であり、森山ら(2015)¹⁾の実験結果と同様、高い寄与率が得られた。このことから大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に要する時間はターゲットサイズWの影響を組み込まず、ポインターの移動距離Dのみで説明され、拡張Fittsの法則よりもID_{NEW}が有効である可能性が期待される。しかし回帰分析に用いたジェスチャ操作に要する時間のデータはそれぞれ9個あるもののID_{NEW}は3種しかない。このことからこれらの寄与率をもってID_{NEW}が有効であるとは結論付けられない。

今後 3 種の D ではなく様々な(W,D)におけるジェスチャ操作に要する時間を収集し、ID_{NEW}の有効性を検討していく予定である。

6. まとめ

本研究では、大型ディスプレイのように視距離がありディスプレイ範囲が広範な場合のジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID との関係に拡張 Fitts の法則を適用できる条件について実験を通じて検討した。大型及び小型ディスプレイを用いてジェスチャ操作の実操作距離を変化させた実験の結果、大型ディスプレイにおいては、ジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID の関係に拡張 Fitts の法則を適用できる程度はマウスほどには高くないことが確認された。一方、小型ディスプレイにおいては実操作距離を小さくすることによりジェスチャ操作へも拡張 Fitts の法則をマウスと同程度に適用できる可能性が確認された。しかしこの小型ディスプレイで拡張 Fitts の法則をマウスと同程度に適用可能とした小さい実操作距離では、大型ディスプレイにおいては位置決め操作が困難となり、拡張 Fitts の法則を適用できないことが示唆された。これらの実験結果及び従来の研究から大型ディスプレイにおけるジェスチャ操作に拡張 Fitts の法則をマウスと同程度に適用できる条件を見出すことは困難であると考えられた。

また森山ら(2015)¹⁾の提案した Fitts の法則の困難度 ID から W の影響を取り除いた困難度 ID_{NEW}を用いて、ジェスチャ操作に要する時間と困難度 ID_{NEW}の関係について検討した結果、操作時間はターゲットサイズ W の影響を組み合わせず、ポインタの移動距離 D のみで説明され、拡張 Fitts の法則よりも ID_{NEW} が有効である可能性が期待された。

参考文献

1) 森山雄大, 西口宏美, 辛島光彦, ハンドジェスチャを用いた 2 次元 GUI 操作時の操作特性に関する研究—若年

者のポインティング操作における Fitts の法則の適用に関する考察—, 東海大学紀要 情報通信学部, vol.8, No.1, pp.1-7, 2015

- 2) P. M. Fitts : The Information Capacity of the Human Motor System in Controlling the Amplitude of Movement., Journal of Experimental Psychology, Vol.47, No.6, pp.381-391, 1954.
- 3) I. S. MacKenzie, B. William, Extending Fitts' law to two-dimensional tasks., Proceedings of the ACM CHI 1992 Conference on Human Factors in Computing Systems, pp.219-226, 1992
- 4) R. A. Burno, B. Wu, R. Dohertya, H. Colett, R. Elnaggar, Applying Fitts' law to gesture based computer interactions., Procedia Manufacturing, Vol.3, pp.4342-4349, 2015
- 5) 中村隼大, 石橋圭太, 岩永光一「タスクに求められる巧緻性がインタフェースの操作性に与える影響」-タッチ操作と空中ジェスチャ操作の比較-, 日本人間工学会関東支部第 46 回大会講演集, pp.98-99, 2016
- 6) A. Pino, E.Tzemis, N. Ioannou, G. Kouroupetroglou, Using Kinect for 2D and 3D Pointing Tasks. -Performance Evaluation-, Human-Computer Interaction, Part IV, pp. 358-367, 2013
- 7) S. Matsuyama, M. Karashima, A Study on Characteristics of Hand Gesture Pointing Operation versus Mouse Pointing Operation. - A Comparison of Velocity Waves of Operation Time between Mouse Pointing and Hand Gesture Pointing with Two kinds of Control-Display Ratio -, HCI International 2017- Posters' Extended Abstracts. Proceedings, Part I, pp.170-176, 2017
- 8) 朝日元生, 高嶋和毅, 築谷喬之, 北村喜文, 岸野文郎, マウスポインティング時の C-D 比が運動特性に与える影響, 情報処理学会論文誌, Vol.49, No.12, pp.3879-3889, 2008
- 9) ISO/TS 9241-411, Ergonomics of Human-system interaction-Part411; Evaluation meth-ods for the design of physical input device, 2012
- 10) R. Kopper, D. A. Bowman, M. G. Silva, R. P. McMahan, A human motor behavior model for distal pointing tasks., Int. J. Human-Computer Studies Vol.68, pp.603-615, 2010.
- 11) 西口宏美, マウス操作時における D/C 比がポインティング操作時間に占める位置決め操作時間に与える影響, 人間工学, Vol.51, No.4, pp.241-247, 2015

ICT を用いたシステムの安全性に関する最近の動向

小林 洋*¹

Recent Trends in System Safety Using ICT

by

Hiromi KOBAYASHI*¹

(received on Aug.28, 2019 & accepted on Nov.15, 2019)

あらまし

本稿では、情報通信技術 (Information Communication Technology: ICT) を用いたシステムの安全性に関する規格と解析/評価手法についての最近の動向を述べる。

Abstract

This paper presents the recent trends of standards and analysis/assessment methods in system safety using ICT.

キーワード：安全性，自動運転，STAMP/STPA，SafetyII，レジリエンス

Keywords: Safety, Automated Driving, STAMP/STPA, SafetyII, Resilience

1. はじめに

近年、ICTはあらゆる産業分野で用いられているが、ICTを用いた製品やシステムは、技術の進歩が著しい上に次第に大規模複雑化すると共にネットワークで結ばれる傾向にあるために、それらに適合した安全性 (safety) に関わる規格や解析/評価手法が求められている。本稿では、まず、安全性の概念にも関わる用語の定義について示した後で、機能安全 (functional safety) と自動車関連の規格の最近の動向について述べる。次に、最近、産業界で注目されるようになってきた解析手法である STAMP/STPA (systems theoretic accident model and processes/ system-theoretic process analysis) および安全性の新しい概念である SafetyII やレジリエンスとその解析/評価手法について述べる。

2. 安全性の規格について

ICT 関連の製品やシステムの安全性の用語の定義や機能の規格については、国際的には ISO や IEC (International Electrotechnical Commission: 国際電気標準会議) により制定されており、WTO (World Trade Organization) の TBT (Technical Barriers to Trade) 協定に基づき、製品やシステムの輸出入における技術的障壁を取り除く必要性から、国際規格と整合性のある国内規格が JIS で制定されている。ICT の進歩は著しいため、次々と新しい規格が作られると共に、数年から 10 年程度で改定が行われる。以下に、安全の概念、機能安全、および自動運転技術にも関わりのある自動車関連の規格についての最近の動向を

述べる。

2.1 安全の概念

ICT 関連の安全⁺¹に関する用語の定義としては、まず、ガイドラインとして国際規格 ISO/IEC Guide51(国内対応規格 JIS Z 8051) が作られている¹⁾。この規格において安全の概念はリスク (risk) を用いて定義されており、ISO/IEC Guide51:2014 での Safety の定義は「freedom from risk which is not tolerable.」, 対応する JIS Z8051:2015 での安全の定義は、「許容不可能なリスクがないこと」となっており⁺²、リスクがゼロの絶対安全は理想だが現実的に不可能であるという考え方である。リスクは「危害の発生確率及びその危害の度合いの組合せ」と定義され、許容可能なリスクは社会の価値観等によって決定される旨も記されるようになった。一方、信頼性に関する用語の国際規格としては IEC60050 (192) があり、この 2015 年の第 1 版と 2016 年の追補 (Amendment) 1 を基にした JIS Z8115:2019 には、日本工業規格として安全という用語が追加されているのだが、その定義は「許容できないリスクから免れている状態」と、前述のガイドラインとの整合性が図られている。なお、この規格で広義の信頼性、即ち、ディペンダビリティについては、用語として「総合信頼性」がディペンダビリティに併記されるようになり、定義については「アイテム⁺³が、要求されたときに、その要求どおりに遂行するための能力」となっている²⁾。

+1 安全性と信頼性は見方が異なる。例えば、事故の可能性が僅かでもあれば停車する列車は、安全性は高いが、要求機能遂行の信頼性は低いということになる。

+2 以前の規格では unacceptable (受容出来ない) だったのが、not tolerable (許容できない) に変更された。

+3 アイテムとは対象となるもの。個別の部品、構成品、システム等で、ハードウェア、ソフトウェア、人間から構成され、サービスを対象とする場合もある。

*1 情報通信学部情報メディア学科 教授
School of Information and Telecommunication
Engineering, Department of Information Media
Technology, Professor

2.2 機能安全

ICT 関連の製品やシステムでは、機能安全 (functional safety) についての規格が定められている³⁾。まず、電気・電子・プログラマブル電子安全関連系の機能安全についての IEC61508:2010 (対応規格 JIS C0508:2012) があり、これは製品やシステムによらない共通の基本安全規格となっている。この規格では、ソフトウェアを含むシステムの安全性を扱うために、故障をランダムハードウェア故障と系統的故障 (systematic failure) (JIS C0508 の用語では、決定論的原因故障) に分類している。前者は、ハードウェア部品の劣化による故障について故障確率を基に、後者は、全安全ライフサイクルのプロセスに関する要求事項を基に対処するものとしている。この基本安全規格を基に、分野別にプロセス産業関連の IEC61511、原子力関連の IEC61513、機械類関連の IEC62061、鉄道関連の IEC62278、自動車関連の ISO26262 等が制定されている。なお、機能安全規格は、現在、人の安全機能に対する具体的な要求事項も考慮できるように改定が試みられている³⁾。

2.3 自動車関連の規格

近年、車載電気電子システムや自動運転関連の技術の発達に伴い、自動車関連の安全性の規格の制定が急速に進んでいる⁴⁻⁵⁾。前述の自動車関連の機能安全規格 ISO26262:2018 は、車載電気電子システムを対象とした規格で、2012 年の第 1 版制定の際にはセーフティケース (safety case) と呼ばれるシステムが安全に作られていることを示す証拠 (論拠) の作成が義務付けられていることが、産業界で話題となった。

ところで、ISO26262 では、機能安全の考え方を基にしているため、システム故障がなければ安全という考え方で、ランダムハードウェア故障と系統的故障のみを扱っている。しかし、自動運転技術への対応の必要性もあり、システム故障以外の、他のドライバの運転や天候、更には性能限界や誤使用等により引き起こされる安全上のリスクについても、早急に規格として制定する必要が生じたため ISO/PAS 21448:2019 SOTIF (Safety of the Intended Functionality) が制定された。また、自動運転技術では、ネットワークへ常時接続したコネクティッドカー (connected car) での運用のために、ISO と SAE (Society of Automotive Engineers: 米国自動車技術者協会) と合同でサイバーセキュリティ対策のための ISO/SAE 21434 の制定が進められている。ネットワークで接続されたシステムでは、セキュリティの脆弱性への攻撃により安全性が損なわれる事があるために、安全性とセキュリティは統合して扱う必要が生じているためと考えられる。

3. 解析／評価手法

安全性や信頼性の解析手法として、現在産業界で普及しているものとしては、FMEA (Failure Modes and Effects Analysis: 故障モード・影響解析)、FTA (Fault Tree Analysis: 故障の木解析)、ETA (Event Tree

Analysis: 事象の木解析)、および HAZOP (Hazard and Operability Study) 等が上げられ、評価手法としては PRA (Probabilistic Risk Assessment: 確率的リスク評価) 等が上げられる⁶⁻⁷⁾。これらの手法は、1950～60 年代に開発されたものであるが、未だに産業界では良く使われている。しかし、近年、システムが大規模複雑化しネットワークで結ばれ、また、ソフトウェア化が進み、構成品や部品等のシステムの構成要素間の相互作用が複雑になってきたことから、これらに対応するための新しい手法の必要性が高まっている。

以下に、まず、最近産業界で注目されるようになってきた解析手法である STAMP/STPA について述べ、次に、安全性の新しい考え方である SafetyII とレジリエンスおよびその解析と評価に用いられる FRAM (Functional Resonance Analysis Method: 機能共鳴分析) と RAG (Resilience Assessment Grid: レジリエンス分析評価グリッド) について述べる。

3.1 STAMP/STPA

STAMP/STPA⁷⁻¹⁴⁾ は、航空機産業等で安全性の研究を行ってきた N. G. Leveson により開発されたモデルと解析手法である。STAMP は、システムを安全のための制御を行う要素のコントローラと制御される要素の被コントロールプロセスによってモデル化したもので、システムをコントローラから被コントロールプロセスへのコントロールアクションと逆方法のフィードバックデータの相互作用によるリアクティブシステム (reactive system) として捉えている。

STPA は、STAMP モデルを用いた安全性解析手法で、コントロールアクションとフィードバックの不適切なタイミングに起因するアクシデント (accident)

(または、損失 (loss)) を、次のような手続きで解析する⁷⁻¹³⁾。

(準備) アクシデント (または、損失) を識別し、そのハザード (hazard: 危害の潜在的な源) と安全制約を導き出す。次に、安全制約の実現に関係するコンポーネント及びその相互作用からなる制御構造図を構築する。

(1) 非安全なコントロールアクション (unsafe control action: UCA) 識別を、制御構造図でのコントロールアクション毎に、次の 4 種類に分類したハザードを適用して行う。

① コントロールアクションが与えられないことによる (not providing) ハザード、② 与えられるとハザード (providing causes hazard)、③ 早すぎる／遅すぎる／誤順序でハザード (too early/too late/wrong order causes hazard)、④ 早すぎる停止／長すぎる適用によるハザード (stop too soon/applying too long causes hazard)。

(2) ハザード要因 (hazard causal factor: HCF) とそのシナリオの特定を、UCA 毎に制御構造図上に想定される不適切な動作をマッピングすることにより行う。

STAMP/STPA の実システムへの導入事例は、文献 7-8) 等に示されている。

3.2 SafetyII と解析／評価手法

SafetyII¹⁵⁻²³⁾ は認知システムや人間工学の分野等から安全性の研究を行ってきた E.Hollnagel により提唱された安全の考え方であり、2. で示した従来の安全 (SafetyI と彼らは呼ぶ) が、リスクが排除された状態として定義され、物事がうまくいかないことを防ぐことによって達成しようとするのに対して、SafetyII では物事がうまくいくことを確実にすることによって達成しようとしている。定量的には、SafetyI は受け入れられないアウトカムの数ができるだけ少ない状況、他方、SafetyII は受け入れられるアウトカムの数ができるだけ多い状況との説明がされている²⁰⁾。この考え方の背景としては、システムは多くの場合、人間の臨機応変性や協調性により安全の許容範囲内でうまく運用されているので、その状態が維持できるようにしようということであり、ヒューマンファクタを重視したアプローチである。SafetyII のもう一つの背景にあるのは、大規模システムでは、構成要素相互間の影響が複雑で事前に把握し難く、設計段階でシミュレーションに時間をかけても大きなトラブルは稀にしか起きないため異常時のデータは取得し難いということが挙げられる。稀にしか起きないようなトラブルの少量のデータを基にして安全対策を考えるという従来のアプローチよりも、正常なオペレーション、つまり安全の許容範囲内のオペレーションでの大量の取得データを基に安全な状態を維持した方が良いのではないかという考え方である。

SafetyII とレジリエンス (resilience) の関係については、SafetyII は、システムのレジリエンス (resilience)、つまり弾力性、復元力、回復力に基づいた安全性の概念であると位置づけられており、レジリエンスを、システムが想定内および想定外のいずれの条件でも、要求通りの働きをするための調整を行う能力 (potential: ポテンシャル) という意味で用いている¹⁶⁻²³⁾。システムのレジリエンスのポテンシャルが高ければ、オペレーションでの変動が大きくても安全にオペレーションは遂行されることになる。レジリエンスの解析と評価の手法として提唱されているものに、FRAM と RAG がある。

FRAM は、システムを複数の機能 (活動) から構成されるものとして捉え、各機能は 6 種類の要素 (入力 (I), 出力 (O), 前提条件 (P), 資源 (R), 時間 (T), 制御 (C)) で外部と相互作用するコンポーネントとしてモデル化し、六角形に各要素のポートをつけた記号で表す。そして、関連する機能の要素間を線で結んだ図を用いて、機能共鳴 (functional resonance) と呼ばれる、人や組織の機能のパフォーマンスの調整作用により生まれる相互作用の解析を行う。

RAG は、組織のレジリエンス評価方法であり、診断的質問を用いて評価を行う。質問群には標準的なもの

が提案されており、それを分野に合わせて修正して用いる。質問群は、対処 (respond), 予見 (anticipate), 学習 (learn), 監視 (monitor) の 4 つのポテンシャル評価用に分かれており、各々 8~10 項目程度の質問項目を設定し、各項目について優秀 (excellent), 満足 (satisfactory), 受容可 (acceptable), 受容不可 (unacceptable), 欠落 (deficient), 考慮無し (missing) の 6 段階で評価を行い、スターチャート (別名、レーダーチャート) にまとめる。

FRAM や RAG の適用方法については、文献 16, 20) 等に示されている。

4. 議論

(1) 安全性のガイドラインにも書かれているように、許容可能なリスクの決定は社会の価値観にもよる。安全対策のためには、危害を評価しなければならない。そのためにはまず危害に対する価値判断をしなければならない。価値というのは、組織での立場によって異なる場合がある他、主観的で人によって異なる場合がある。特に、複数の人や資産が対象になる場合、価値判断に関する合意の形成をしなければならないことが、安全対策を考える上で難しい点である²⁴⁻²⁵⁾。このことから、自動運転の場合には、SAE レベル 4 の特定条件下における高度自動運転については空港や港湾の産業用等で実用化が進んでいるが、一番上のレベル 5 の完全自動運転は、安全対策で複数の人や資産の危害についてのトレードオフが必要となり、トレードオフの方針まで完全に規格化するのは極めて困難なことから、現実的ではないように思われる。

(2) STAMP/STPA を従来の FMEA や FTA と比較すると、従来手法では抽出できなかったハザード要因が STAMP/STPA で抽出できたというケースがある一方で、逆のケースもあるようで、両方を組み合わせるのが良いかもしれないとの提案もなされている¹²⁾。解析手法については、システムの形態によって適した手法があるように思われる。また、一種類の手法ではどうしても漏れが出てしまうので、一般的にはいくつかの手法を組み合わせるのが良いということになるのであろう。

(3) SafetyII の評価手法として、レジリエンスの評価手法である RAG を用いる理由については、RAG においてレジリエンスのパフォーマンスに対するポテンシャルを評価することが、SafetyII での見方と一致しているためと述べられている。また、SafetyII の説明で示されている受け入れられるアウトカムを数えるよりも、RAG における 4 つのポテンシャルを評価する方が簡単であるとも記されている²⁰⁾。しかしながら、これらの説明は直観的で厳密性に欠けているように思われる。

(4) レジリエンスという言葉は様々な分野で使われるようになってきているが、ISO の社会セキュリティ関係 (危機管理等も含む) の専門委員会 (TC) ではレジリエンスに関する規格化が進められており、

ISO22300:2018 Security and Resilience-Vocabulary 等の一連の規格が次々と制定されている。レジリエンス関連の規格は、当面、社会セキュリティの分野が中心となり作成されていくのかもしれない。

5. おわりに

本稿では、まず、安全性に関する規格の最近の動向について述べた。技術の進歩の著しい ICT 関連の安全性に関する規格は、数年から 10 年程度で改定されると共に次々と新しい規格が作られていく。用語の定義、つまり概念も技術の進歩とともに変更が加えられたり、新しい規格で定義されたりする。機能安全規格についても、技術の進歩と適用領域の拡大に追従するように、遅滞なく改定や新規作成を行う努力がされている。次に、本稿では、最近注目され始めている安全性の解析/評価手法について示した。STAMP/STPA は、システムを制御系としてモデル化し、コントロールアクションとフィードバックデータの組み合わせを解析するところに特徴がある。解析手法はシステムの形態によって適した手法があるように思われ、一般的には、いくつかの手法を組み合わせる用いるのが良いのであろうが、導入には費用対効果を考慮する必要がある。SafetyII については、概念自体が新しいもので、本稿執筆の 2019 年 8 月末時点では、ICT 関連の安全規格に直接の影響は与えていないようなので、解析/評価手法として FRAM と RAG を紹介し、その基となる概念を示すという位置づけで記した。FRAM や RAG は、人間の臨機応変性や協調性による組織のレジリエンス性を解析/評価するものであり、今後、社会技術システムの安全性の解析や評価にどのように影響を与えていくかについて注目していきたい。

参考文献

規格自体については省略する。

- 1) 向殿政男監修, 安全の国際規格 1, 安全設計の基本概念, 2:機械安全, 3:制御システムの安全, 日本規格協会, 2007.
- 2) 益田昭彦, JIS Z 8115ディペンダビリティ (信頼性) 用語の現状と将来, IEICE Fundamentals Review, Vol. 9, No. 4, pp. 318-329, 2016.
- 3) 佐藤吉信, 機能安全の基礎, 日本規格協会, 2014.
- 4) ビジネスキューブ・アンド・パートナーズ, ISO26262 実践ガイドブック, 日経BP, 2013.
- 5) ビジネスキューブ・アンド・パートナーズ, ISO26262 について, https://biz3.co.jp/lp_category/iso26262
- 6) N.G. Leveson: Safeware-System Safety and Computers, Addison Wesley, 1995.
- 7) N.G. Leveson: Engineering a Safer World, MIT, 2011.
- 8) N.G. Leveson, J.P. Thomas, STPA HANDBOOK, 2018. <http://psas.scripts.mit.edu/home/materials/>
- 9) はじめてのSTAMP/STPA, IPA, 2016 <https://www.ipa.go.jp/ikc/reports/20190329.html>
- 10) はじめてのSTAMP/STPA (実践編), IPA, 2017 URL 同上
- 11) はじめてのSTAMP/STPA (活用編), IPA, 2018 URL 同上
- 12) 川野卓, 鉄道信号システムの安全性解析における STAMP/STPA の適用について, 日本信頼性学会誌, Vol. 41, No. 2, pp. 96-102, 2019.
- 13) 高田哲也, 浅野晃, 鉄道信号の安全性と安全性評価の動向, 日本信頼性学会誌, Vol. 41, No. 3, pp. 198-205, 2019.
- 14) 宮崎義弘, 橋本岳雄, 岡田学, 自動車運転システムへの STPA 試行事例, JASPER, www.ipa.go.jp/files/000070993.pdf, 2018.
- 15) E. Hollnagel, D.D. Woods, N. Leveson 編著, 北村正晴監訳, レジリエンスエンジニアリング: 概念と指針, 日科技連, 2012.
- 16) E. Hollnagel, J. Paries, D.D. Woods, J. Wreathall 編著, 実践レジリエンスエンジニアリング, 日科技連, 2014.
- 17) C.P. Nemeth, E. Hollnagel, レジリエンスエンジニアリング応用への指針, 日科技連, 2017.
- 18) エリック・ホルナゲル著, 小松原明哲監訳, 社会技術システムの安全分析: FRAMガイドブック, 海文堂, 2013.
- 19) エリック・ホルナゲル著, 北村正晴, 小松原明哲監訳, Safety-I & Safety-II: 安全マネジメントの過去と未来, 海文堂, 2015.
- 20) エリック・ホルナゲル著, 北村正晴, 小松原明哲監訳, Safety-IIの実践: レジリエンスポテンシャルを強化する, 海文堂, 2019.
- 21) 北村正晴, レジリエンスエンジニアリングが目指す安全Safety-IIとその実現法, IEICE Fundamentals Review, Vol. 8, No. 2, pp. 84-95, 2016.
- 22) エリック・ホルナゲル, 松本隆明, IoT時代に求められるレジリエンスエンジニアリングの考え方, SEC journal, Vol. 13, No. 1, pp. 2-7, 2017.
- 23) 野本秀樹, 道浦康貴, 石濱直樹, 片平真史, FRAM (機能共鳴分析手法) による成功学に基づく安全工学, SEC journal, Vol. 14, No. 1, pp. 42-49, 2018.
- 24) 小林洋, システムの安全性とは何に対する安全性なのか?, ソフトウェアシンポジウム2012(SS2012), ソフトウェア技術者協会, pp. 3.1-3.7, 2012.
- 25) 小林洋, 安全性についての課題—価値判断とAIの使用について, 東海大学紀要情報通信学部, Vol. 10, No. 1, pp. 114-116, 2017.

大学初年次における数学教材の提案（その 29）

～行列の指数関数とその応用～

貴田研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 29 ～ Exponential Functions of Matrices and Their Applications ～

by

Kenshi KIDA *1

(received on Nov. 29, 2019 & accepted on Jan. 9, 2020)

あらまし

行列の指数関数の計算手法として、ジョルダンの標準形を用いる方法を紹介する。さらに、その応用として、定数係数 1 階線形連立常微分方程式の解法について述べる。

Abstract

We first explain examples of calculations of exponential functions of matrices by means of diagonalizations and Jordan standard forms. Further, we present methods of solution of systems of ordinary differential linear equations by means of exponential functions of matrices

キーワード : 行列の指数関数, 連立常微分方程式, ジョルダン標準形

Keywords: *Exponential Functions of Matrices, System of Ordinary Differential Equations, Jordan Standard Form*

1. はじめに

行列の指数関数を用いた定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法¹⁾, そして係数行列の標準化 (対角化する, またはジョルダン標準形に直す) による定数係数 1 階線形連立常微分方程式の解法²⁾については既に述べた。

この論文では, 行列の指数関数の計算に, 対角化をするか, またはジョルダン標準形に直すことが極めて有用であることを, いくつかの具体例を挙げることによって示したい。

さらに, 行列の指数関数の定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法への応用について詳述したい。

2. 行列の指数関数

この章では, 行列の整級数を定義してから, その性質について述べる¹⁾。

変数 t に関する整級数

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots$$

の各 t を n 次行列 A で置き換えることによって得られる行列

$$c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^k + \cdots$$

のことを, 行列 A の整級数という。この収束と発散については次の結果が知られている。

*1 高輪教養教育センター 准教授

Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate
Professor

定理 2.1 元の変数 t に関する整級数の収束半径を ρ とする. 行列 A の整級数は, A のすべての固有値の絶対値が ρ より小さければ収束する. また, 一つでも固有値の絶対値が ρ を越えれば発散する.

そこで, 指数関数 e^t のマクローリン展開の収束半径が無限大であり

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots \quad (-\infty < t < +\infty)$$

であることを利用して, n 次行列 A の指数関数 $e^A (= \exp A)$ を次の整級数

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots \quad (E \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

で定義する. これは上記の定理により, 任意の n 次行列 A に対して収束する.

さらに, 次の性質が成り立つことが知られている.

① 任意の n 次正則行列 P に対して

$$\exp P^{-1}AP = P^{-1}(\exp A)P \text{ すなわち } \exp A = P(\exp P^{-1}AP)P^{-1}$$

② $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$

③ 実数値行列関数 $\exp tA$ は解析関数であり, 項別に微分すると

$$\frac{d}{dt}(\exp tA) = A \exp tA$$

が成り立つ.

④ ${}^t(\exp A) = \exp {}^tA$

⑤ $AB = BA$ ならば $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$

⑥ $\exp A$ は正則行列で, $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

3. 行列の指数関数の計算例

例題 3.1

次の行列について, 指数関数 $\exp tA$ を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答)

一般に $\exp tA$ を直接計算することは得策ではないので, まずは A を標準化する(対角化する, またはジョルダン標準形に直す)ことにする.

(1) 変換行列として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

をとると

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と、 A は対角化される.

*上の計算過程については、付録に記述している.

次に、第2章の性質①より

$$\exp tA = P(\exp P^{-1}tAP)P^{-1} \dots \dots (*)$$

が成り立つことを利用する.

すると

$$\begin{aligned} \exp(P^{-1} tA P) &= \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}^n + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} (2t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (3t)^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (2t)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2t)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3t)^n \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 3t + \frac{1}{2!}(3t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(3t)^n + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることから、(*)により

$$\begin{aligned} \exp tA &= P \exp(P^{-1} tA P) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

であることがわかった。

(2) 変換行列として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

をとると

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となって、 A はジョルダン標準形に直された。

*上の計算過程については、付録に記述している。

次に、(1)と同様にして

$$\exp tA = P(\exp P^{-1}tAP)P^{-1} \dots \dots (*)$$

が成り立つことを利用する。

まず

$$\exp(P^{-1}tAP) = \exp \begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} \dots \dots (**)$$

を求める。

$$\begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^k & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^k & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

であるから

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^n & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^n \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 3t + \frac{1}{2!} (3t)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (3t)^n + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 4t + \frac{1}{2!} (4t)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (4t)^n + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる。

さらに, $\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$ であるから, 第2章の性質⑤により $\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$ を

$$\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \textcircled{7}$$

と変形してから求めればよい。

ここで

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots, n, \dots)$$

だから

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \textcircled{8}$$

である。

そして

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} (2t)^2 & 0 \\ 0 & (2t)^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (2t)^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!} (2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (2t)^n + \dots & 0 \\ 0 & 1 + 2t + \frac{1}{2!} (2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (2t)^n + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \dots \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

である。

⑦に⑧, ⑨を代入して

$$\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

が得られた。

以上より, (***) から

$$\exp(P^{-1} tA P) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

であることがわかる.

したがって, (*) により

$$\begin{aligned} \exp tA &= P \exp(P^{-1} tA P) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{3t} & e^{4t} \\ e^{2t} & (t+1)e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{2t} & (-t+1)e^{2t} - e^{3t} & te^{2t} & (t-1)e^{2t} + e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + e^{3t} - 2e^{4t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - 2e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + 2e^{3t} - 2e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることがわかった.

(解答終)

4. 定数係数連立常微分方程式の解法

行列の指数関数 $\exp tA$ の応用として, 定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法について述べる.

変数分離形微分方程式

$$x'(t) = ax(t), \quad x(0) = \alpha \quad (a, \alpha \text{ は定数})$$

の解が $x(t) = x(0)e^{at} = \alpha e^{at}$ であることに対応している, 次の定理を適用する.

定理 4.1¹⁾

定数係数 1 階線形連立常微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } A \text{ は実数係数の } n \text{ 次行列})$$

を, 初期条件

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

の下で解くと, 解は

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \exp tA \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

である.

例題 4.1

次の定数係数連立常微分方程式を解け.

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases} \quad ; \text{初期条件} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ x_3(0) = 5 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2' = 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_4' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{cases} \quad ; \text{初期条件} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 3 \\ x_3(0) = 2 \\ x_4(0) = 4 \end{cases}$$

(解答)

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

とおけば, 微分方程式は

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表される.

したがって, 初期条件に対する解は, 定理 4.1 によって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} + e^{3t} \\ 3e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば, 微分方程式は

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

と表される。

したがって、初期条件に対する解は、定理 4.1 によって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{2t} & (-t+1)e^{2t} - e^{3t} & te^{2t} & (t-1)e^{2t} + e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + e^{3t} - 2e^{4t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - 2e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + 2e^{3t} - 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} \\ (t+2)e^{2t} \\ e^{2t} + 2e^{3t} + e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(解答終)

参考文献

- 1) 貴田研司, “大学初年次における数学教材の提案（その 2）～微分方程式と行列の指数関数～,” 東海大学紀要情報通信学部, Vol. 9, No. 1, 2016, pp. 24-30
- 2) 貴田研司, “大学初年次における数学教材の提案（その 8）～ジョルダン標準形と微分方程式～,” 東海大学紀要情報通信学部, Vol. 10, No. 1, 2017, pp. 78-91

付録

例（行列の標準化）²⁾

次の行列 A について、対角化可能であるかどうかを調べ、対角化可能ならばある正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ。また、対角化可能でない場合には、変換行列 P を求めて $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形 J になるようにせよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ (2) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(解答)

以下、 \rightarrow によって行基本変形を示すものとする。

(1) まず、 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

なので、 A の固有値は、 $\lambda = 2$ (重複度 2), 3 である.

さて

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より rank}(A - 2E) = 1 \text{ だから } \dim W(2) = 3 - 1 = 2$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より rank}(A - 3E) = 2 \text{ だから } \dim W(3) = 3 - 2 = 1$$

であるから、 A は対角化可能であることがわかる.

そこで、固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2) に属する固有ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A - 2E)\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$u_3 = u_1 + u_2.$$

よって

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

と書けるので、一組の一次独立な固有ベクトルとして、 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる.

次に、固有値 $\lambda = 3$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A - 3E)\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$v_1 = 0, \quad -2v_2 + v_3 = 0.$$

よって

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_3 \\ 2C_3 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{ は任意定数})$$

と書けるので、一つの固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる.

したがって、正則行列として

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる.

(2) まず、 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)(4-\lambda)$$

なので、 A の固有値は、 $\lambda = 2$ (重複度 2), 3, 4 である. さて

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より rank}(A - 2E) = 3 \text{ だから } \dim W(2) = 4 - 3 = 1$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より rank}(A - 3E) = 3 \text{ だから } \dim W(3) = 4 - 3 = 1$$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より rank}(A - 4E) = 3 \text{ だから } \dim W(4) = 4 - 3 = 1$$

だから、固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2), 3, 4 に対するジョルダン細胞の数は、それぞれ 1 個ずつであることがわかる. したがって、行列

A のジョルダン標準形 J は

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である. 今、変換行列 P を

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$$

とおくことにすると

$$AP = A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = (A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, A\mathbf{p}_3, A\mathbf{p}_4)$$

$$PJ = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (2\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2, 3\mathbf{p}_3, 4\mathbf{p}_4)$$

となるが, $AP = PJ$ が成り立つとすると

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}_1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ A\mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_3 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ A\mathbf{p}_4 = 4\mathbf{p}_4 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ.

①より

$$(A - 2E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$x_1 = x_3, x_2 = 0, x_4 = 0$$

これより

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

と書ける. そこで, 例えば $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる.

②について, 上で求めた $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A - 2E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

であるから

$$y_1 = y_3 - 1, y_4 = 1, y_2 = 1$$

となっているので

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - 1 \\ 1 \\ C_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

なので、例えば $C_2 = 1$ とおいて、 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる。

③より

$$(A - 3E)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

であるから

$$z_1 = z_2, \quad z_4 = 2z_2, \quad z_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_3 \\ 0 \\ 2C_3 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{ は任意定数})$$

と書ける。そこで、例えば $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとる。

④より

$$(A - 4E)\mathbf{p}_4 = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$w_1 = 0, \quad w_2 = w_4, \quad w_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_4 \\ 0 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (C_4 \text{ は任意定数})$$

と書ける. そこで, 例えば $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる.

したがって, 変換行列として

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくことにすれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり $AP = PJ$ すなわち $P^{-1}AP = J$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} (=J)$$

が成り立つ.

(解答終)

大学初年次における数学教材の提案（その 30）

～ガロア群～

貴田研司*¹

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 30

～ The Galois Groups ～

by

Kenshi KIDA *¹

(received on Nov. 29, 2019 & accepted on Jan. 9, 2020)

あらまし

ガロア拡大, およびガロア群の基本的な概念の紹介を目的とする. 本論文では, 特に, 多項式のガロア群について詳しく扱うことにするが, 解説の後に具体的に 2 つの分離多項式を挙げて, そのそれぞれのガロア群を求める過程について詳述する.

Abstract

The purpose of this paper is to present fundamental concepts of the Galois extensions and the Galois groups. In particular, we afford detailed explanations and several concrete examples of the Galois groups of separable polynomials.

キーワード: ガロア群, ガロア拡大, 分離多項式

Keywords: Galois Group, Galois Extension, Separable Polynomial

1. はじめに

大学初年次の数学科目において専攻を問わず皆に学んで欲しいとの思いを込めて, ガロア拡大, そしてガロア群の概念の基本的な部分を紹介する. そのために, 体の代数拡大について述べることから始める. それから, 最小多項式, 最小分解体, 単純拡大などのガロア群を学ぶのに必要な概念の紹介を行う. そして, ガロア群の中でも特に, 多項式のガロア群についての詳しい解説をしたのちに, 具体的な例として 2 つの分離多項式を挙げて, そのそれぞれのガロア群を構成していく方法について丁寧に述べる.

本論文の執筆にあたっては, 増田真郎「応用のための代数系入門」¹⁾, 横井秀夫・碓野敏博共著「代数演習」²⁾を大いに参考にした.

2. 体の拡大

体 L の部分集合 K が, L と同じ演算で体をなすとき, L を K の拡大体, K を L の部分体といい, L/K で表す.

体の拡大 L/K において, L は K 上の線形空間とみられる. L が K 上の線形空間として有限次元であるとき, L/K は有限次拡大, または有限拡大という. L/K の線形空間としての次元を, その拡大次数といい, $[L : K]$ と表す. また, L/K の線形空間としての基底を, L の K 上の基底という.

*1 高輪教養教育センター 准教授

Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate
Professor

定理 2.1

$L/F, F/K$ が共に有限次拡大で

$$[L:F] = s, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ を } L \text{ の } F \text{ 上の基底}$$

$$[F:K] = t, \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \text{ を } F \text{ の } K \text{ 上の基底}$$

とする. このとき st 個の元

$$\alpha_i \beta_j \quad (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t)$$

は, L の K 上の基底である. すなわち L/K も有限次拡大で

$$[L:K] = [L:F][F:K]$$

が成り立つ.

体の拡大 L/K において, L の元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (有限個) と K を含む最小の体を, K 上 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ によって生成された体, または K に $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を添加して得られる体といい, $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ と表す. 特に, ただ一つの元 α を添加して得られる体 $K(\alpha)$ を単純拡大といい, α を $K(\alpha)$ の原始元という.

体の拡大 L/K において, L の元 α を根にもつような, K 上の多項式 $f(x) \neq 0$ が存在するとき, α を K 上の代数的元という. また, L の任意の元が K 上の代数的元であるとき, L/K は代数的拡大, または単に代数拡大であるという.

これについては, 以下のことが知られている.

定義 (最小多項式)

体の拡大 L/K において, L の元 α が K 上の代数的元であるとき, α を根とする K 上の多項式の中で次数が最低のものを, α の K 上の最小多項式という. これは, K の定数因子を除いて一意的に定まり, K 上既約である. その最小多項式の次数を, 代数的元 α の K 上の次数という.

定義 (K -同型)

体 K の 2 つの拡大 L/K と L'/K の間の同型 $\sigma: L \rightarrow L'$ が K の元を不変にすると K -同型であるという.

定理 2.2

体 K 上の代数的元 α を K に添加して得られる単純拡大 $K(\alpha)$ は, α の K 上の最小多項式 $p(x)$ を法とする多項式環 $K[x]$ の剰余類体 $K[x]/(p(x))$ に K -同型である. したがって, 拡大 $K(\alpha)/K$ は有限次拡大で, その拡大次数は α の K 上の次数に等しい.

定理 2.3

体 K 上の代数的元 α の、 K 上の次数を n とするとき、単純拡大 $K(\alpha)$ の元は

$$k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_{n-1}\alpha^{n-1} \quad (k_i \in K; i = 0, 1, \dots, n-1)$$

の形に一意的に表される。

定理 2.4

体の拡大 L/K が有限次拡大であるための必要十分条件は、 L が K 上の代数的元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ （有限個）を添加して得られる体であること、すなわち

$$L = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

となることである。

定義（最小分解体）

体の拡大 L/K に対して、 K 上の多項式 $f(x)$ が L において 1 次式の積に分解される時、すなわち、 $f(x)$ の根がすべて L に属するとき、 L を $f(x)$ の分解体という。特に、 L のいかなる真の部分体も $f(x)$ の分解体にならないとき、すなわち、 $f(x)$ の根をすべて K に添加して L が得られるとき、体 L を $f(x)$ の K 上の最小分解体という。

最小分解体について、次のことが知られている。

定理 2.5

体 K 上の任意の多項式 $f(x)$ に対して、 $f(x)$ の K 上の最小分解体は必ず存在して、それは K 上の同型を除いて一意的に定まる。

定義（分離多項式）

体 K 上の多項式 $f(x)$ がその分解体において重根をもたないとき、分離多項式と呼ばれる。

3. ガロア群

体 L の自己同型写像、すなわち L から L 自身の上への同型写像の全体からなる集合を $\text{Aut}(L)$ と記す。 $\text{Aut}(L)$ は、写像の合成に関して群をなすから、 L の自己同型群と言われる。

K が L の部分体であるとき、 L の K - 自己同型写像、すなわち

$$\sigma(a) = a \quad (a \in K)$$

であるような $\text{Aut}(L)$ の元の全体からなる集合を $G(L/K)$ と記す。これは、 $\text{Aut}(L)$ の部分群である。

S を $\text{Aut}(L)$ の空でない部分集合とすると、 S の各々の元によって不変であるような L の元の全体からなる集合

$$F = \{ \alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha \text{ (任意の } \sigma \in S) \}$$

は、 L の部分体となる．これを L における S の不変体（または，固定体）といい， $i(S)$ と表す．

L/K を体の拡大とする． L の K -自己同型群 $G(L/K)$ の L における不変体が K に一致するとき，すなわち

$$i(G(L/K)) = K$$

が成り立つとき，体の拡大 L/K をガロア拡大という．このとき $G(L/K)$ を，ガロア拡大の L/K のガロア群という．

これについて，以下のことが知られている．

定理 3.1

L/K を有限次拡大とするととき，次の条件(1)，(2)，(3)は同値である．

- (1) L/K はガロア拡大である．
- (2) $\text{Aut}(L)$ の部分群 G で $K = i(G)$ となるものが存在する．
- (3) L は， $K[x]$ のある分離多項式 $f(x)$ の K 上の最小分解体である．

これらが成り立つとき

$$G = G(L/K), \quad |G(L/K)| = [L : K]$$

となっている．

[分離多項式のガロア群]

有限次拡大 L/K がガロア拡大であるとき，定理 3.1 により， L は， $K[x]$ のある分離多項式 $f(x)$ の K 上の最小分解体である．

今， $f(x)$ を $K[x]$ の分離多項式として， $f(x)$ の K 上の最小分解体を L とする．ガロア拡大の L/K のガロア群 $G(L/K)$ のことを，多項式 $f(x)$ のガロア群（または，代数方程式 $f(x) = 0$ のガロア群）という．

多項式

$$f(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0 \quad (k_i \in K; i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

の， L における根を α とするとき，任意の $\sigma \in G(L/K)$ に対して

$$\begin{aligned} f(\sigma(\alpha)) &= k_n \{\sigma(\alpha)\}^n + k_{n-1} \{\sigma(\alpha)\}^{n-1} + \cdots + k_1 \sigma(\alpha) + k_0 \\ &= k_n \sigma(\alpha^n) + k_{n-1} \sigma(\alpha^{n-1}) + \cdots + k_1 \sigma(\alpha) + k_0 \\ &= \sigma(k_n \alpha^n + k_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + k_1 \alpha + k_0) \\ &= \sigma(f(\alpha)) \\ &= \sigma(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから， $\sigma(\alpha)$ もまた $f(x)$ の根である．

さらに、次のことが知られている。

定理 3.2

$f(x)$ を $K[x]$ の n 次分離多項式とすると、 $f(x)$ のガロア群 G は、 n 次対称群の部分群 (n 次置換群) に同型である。すなわち、 n 次分離多項式 $f(x)$ のガロア群 G は、 $f(x)$ の n 個の異なる根の全体からなる集合の置換群となっている。

定理 3.3 (分離多項式の既約性)

$K[x]$ の分離多項式 $f(x)$ が既約であるための必要十分条件は、 $f(x)$ のガロア群 G が推移的である、すなわち、 $f(x)$ の任意の 2 つの根 α, β について、ある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\alpha) = \beta$ となることである。

4. 代数拡大の例

例

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \quad (\omega \text{ は } 1 \text{ の原始 } 3 \text{ 乗根})$$

について考える。

(注意)

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ とすれば } \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ であり, } \omega = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ とすれば } \omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ である.}$$

まず、 $\sqrt[3]{2}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式は $x^3 - 2$ であり

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

となっている。

ここで、 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とおく。 $K_1[x] \supset \mathbb{Q}[x] \ni x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$ について、 $\omega, \omega^2 \notin K_1$ である。したがって、 $x^2 + x + 1$ は $K_1[x]$ で既約であるから、 ω の K_1 上の最小多項式である。よって

$$K_1[x]/(x^2 + x + 1) \cong K_1(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$$

が成り立つ。

$K_1(\omega)$ の元 α は一意的に

$$\alpha = u + v\omega \quad (u, v \in K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$$

と表される。したがって

$$u = a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2, \quad v = a' + b'\sqrt[3]{2} + c'(\sqrt[3]{2})^2 \quad (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q})$$

とすれば

$$\alpha = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2\} + \{a' + b'\sqrt[3]{2} + c'(\sqrt[3]{2})^2\}\omega = a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 + a'\omega + b'\sqrt[3]{2}\omega + c'(\sqrt[3]{2})^2\omega$$

と、一意的に表される. $K_1(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ は, このような形の元全体からなる体であり

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}] = 6$$

であることがわかる.

5. ガロア群の例

例題 1

分離多項式 $p(x) = x^3 - 2$ の \mathbb{Q} 上のガロア群を求めよ.

(解答)

$$p(x) = x^3 - 2 = (x - a)(x - a\omega)(x - a\omega^2) \in \mathbb{Q}[x] \quad (a = \sqrt[3]{2}, \omega \text{ は } 1 \text{ の原始 } 3 \text{ 乗根})$$

は, 既約な分離多項式であり, 最小分解体は $L = \mathbb{Q}(a, a\omega, a\omega^2) = \mathbb{Q}(a, \omega)$ であり. 第 4 章の例により, $[L : \mathbb{Q}] = 6$ と

なっていることがわかる. したがって, $p(x)$ のガロア群を G とすると, 定理 3.1 と定理 3.2 により

$$G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \quad |G| = [L : \mathbb{Q}] = 6, \quad G \cong S_3$$

であることがわかる.

定理 3.3 から, $\sigma \in G$ によって, a は a の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $p(x)$ の根 $a, a\omega, a\omega^2$ のいずれかにうつされ, そして, ω は ω の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$ の根 $\omega, \bar{\omega} = \omega^2$ のいずれかにうつされる.

したがって, G の元は

$$\sigma_0: a \mapsto a, \omega \mapsto \omega,$$

$$\sigma_1: a \mapsto a\omega, \omega \mapsto \omega,$$

$$\sigma_2: a \mapsto a\omega^2, \omega \mapsto \omega,$$

$$\tau_0: a \mapsto a, \omega \mapsto \omega^2,$$

$$\tau_1: a \mapsto a\omega, \omega \mapsto \omega^2,$$

$$\tau_2: a \mapsto a\omega^2, \omega \mapsto \omega^2$$

のいずれかとなるが, $|G| = 6$ であるからこれらが G の元のすべてである.

以上より, 定理 3.2 に述べられているように

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a & a\omega & a\omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a\omega & a\omega^2 & a \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a\omega^2 & a & a\omega \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a & a\omega^2 & a\omega \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a\omega & a & a\omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} a & a\omega & a\omega^2 \\ a\omega^2 & a\omega & a \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる.

(解答終)

例題 2

分離多項式 $p(x) = x^4 - 2$ の \mathbb{Q} 上のガロア群を求めよ.

(解答)

$$p(x) = x^4 - 2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}) = (x + bi)(x - bi)(x + b)(x - b) \in \mathbb{Q}[x] \quad (b = \sqrt[4]{2}, i \text{ は虚数単位})$$

は、既約な分離多項式であり、最小分解体は $L = \mathbb{Q}(bi, -bi, b, -b) = \mathbb{Q}(b, i)$ である. これから、第 4 章の例と同様な議論

を行う. まず、 $b = \sqrt[4]{2}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式は $x^4 - 2$ であり

$$\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}),$$

となっており、 $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ が成り立つ. ここで、 $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ とおくと、 $K_1[x] \supset \mathbb{Q}[x] \ni x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ について、 $i, -i \notin K_1$ である. よって、 $x^2 + 1$ は $K_1[x]$ で既約であるから、 i の K_1 上の最小多項式である. よって

$$K_1[x]/(x^2 + 1) \cong K_1(i) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$$

となり、 $[L : K_1] = 2$ が成り立つ.

したがって、定理 2.1 により $[L : \mathbb{Q}] = [L : K_1][K_1 : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8$ となっていることがわかる. したがって、 $p(x)$ のガロア群を G とすると、定理 3.1 と定理 3.2 により

$$G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \quad |G| = [L : \mathbb{Q}] = 8, \quad G \cong (S_4 \text{ の部分群})$$

であることがわかる.

定理 3.3 から、 $\sigma \in G$ によって、 b は b の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $p(x)$ の根 $bi, -bi, b, -b$ のいずれかにうつされ、そして、 i は i の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ の根 $i, -i$ のいずれかにうつされる.

したがって、 G の元は

$$1_G: b \mapsto b, i \mapsto i,$$

$$\rho_1: b \mapsto bi, i \mapsto i,$$

$$\rho_2: b \mapsto -b, i \mapsto i,$$

$$\rho_3: b \mapsto -bi, i \mapsto i,$$

$$\rho_4: b \mapsto b, i \mapsto -i,$$

$$\rho_5: b \mapsto bi, i \mapsto -i,$$

$$\rho_6: b \mapsto -b, i \mapsto -i,$$

$$\rho_7: b \mapsto -bi, i \mapsto -i$$

のいずれかとなるが、 $|G| = 8$ であるからこれらが G の元のすべてである。

以上より、定理 3.2 に述べられているように

$$\begin{aligned} 1_G &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ b & -b & bi & -bi \end{pmatrix}, \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ bi & -bi & -b & b \end{pmatrix}, \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ -b & b & -bi & bi \end{pmatrix}, \\ \rho_3 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ -bi & bi & b & -b \end{pmatrix}, \\ \rho_4 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ b & -b & -bi & bi \end{pmatrix}, \\ \rho_5 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ bi & -bi & b & -b \end{pmatrix}, \\ \rho_6 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ -b & b & bi & -bi \end{pmatrix}, \\ \rho_7 &= \begin{pmatrix} b & -b & bi & -bi \\ -bi & bi & -b & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となっていることがわかる。

さらに、ここで

$$\sigma = \rho_1: b \mapsto bi, i \mapsto i, \quad \tau = \rho_4: b \mapsto b, i \mapsto -i$$

とおくと

$$\sigma^2: b \mapsto -b, i \mapsto i$$

$$\sigma^3: b \mapsto -bi, i \mapsto i$$

$$\sigma^4: b \mapsto b, i \mapsto i$$

なので $\sigma^4 = 1$ が成り立つ。また、 $\tau^2: b \mapsto b, i \mapsto i$ により $\tau^2 = 1$ も成り立つ。

さらに

$$\sigma\tau^{-1}: b \mapsto bi, i \mapsto -i,$$

$$\tau\sigma\tau^{-1}: b \mapsto -bi, i \mapsto i$$

かつ

$$\sigma^{-1} = \sigma^3: b \mapsto -bi, i \mapsto i$$

により $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ も得られた。

したがって、 G は二面体群

$$D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$$

に同型であることもわかる。

(解答終)

参考文献

- 1) 増田真郎「応用のための代数系入門」サイエンス社, 1981
- 2) 横井秀夫・碓野敏博共著「代数演習」サイエンス社, 1989

大学初年次における数学教材の提案（その31）

～有限体のガロア群～

貴田研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 31

～ The Galois Groups of Finite Fields ～

by

Kenshi KIDA *1

(received on Nov. 29, 2019 & accepted on Jan. 9, 2020)

あらまし

まず、有限体のガロア群がフロベニウス自己同型によって生成される巡回群であることを解説する。そして、具体的な計算例を挙げて理解を助けることとする。この例の中で、ガロア対応についても述べる。

Abstract

First, we explain the concept of Galois groups of finite fields. Further, we present an example of Galois groups of finite fields and show the Galois correspondences in this case.

キーワード : ガロア群, 有限体, フロベニウス写像, ガロア対応

Keywords: Fundamental Theorem of Galois Theory, Galois Group, Finite Field, Frobenius Map, Galois Correspondence

1. はじめに

有限体の場合には、ガロア群の構造について簡明な結果が得られているのでこれについて紹介する。有限体の存在と一意性、そしてその構成方法から始めて、ガロア群がフロベニウス写像と呼ばれるものによって生成される巡回群であることについて述べ、そのあとで具体例を挙げることとする。また、ガロア対応についても触れる。

本論文の執筆にあたっては、増田真郎「応用のための代数系入門」¹⁾を大いに参考にした。

2. 有限体のガロア群

有限体について以下のことが知られている¹⁾²⁾。

定理2.1 (有限体の構成方法)

$\varphi(x)$ を \mathbb{Z}_p 上の n 次既約多項式とすれば、 $\mathbb{Z}_p[x]/(\varphi(x))$ は \mathbb{Z}_p の n 次拡大体で、元の個数が p^n の有限体である。

定理2.2 (有限体の存在と一意性)

任意の素数 p と自然数 f に対して、元の個数が p^f となる有限体 F が存在する。このような F は素体 \mathbb{Z}_p 上の分離多項式 $x^{p^f} - x$ の最小分解体に同型である。したがって、同型を度外視して一意的に定まる。

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate
Professor

記号 q 個の元からなる体を $GF(q)$ と表す.

※有限体のことを発見者にちなんで, ガロア体 (Galois Field) ともいう.

定理2.3

$K = GF(q)$ ($q = p^n$) が有限体で, F を K の f 次拡大体とすると, $F = GF(q^f)$ であり, F は K 上の分離多項式 $x^{q^f} - x$ の K 上の最小分解体である. したがって, 有限体の有限次拡大はガロア拡大である.

定理 2.4 (フロベニウス写像)

F を有限体 $K = GF(q)$ の f 次拡大体とする. このとき, ガロア群 $G(F/K)$ は, 写像

$$\sigma : \beta \rightarrow \beta^q \quad (\beta \in F)$$

で生成される位数 f の巡回群である.

一般に, ガロア拡大 L/K のガロア群 $G(L/K)$ が巡回群であるときに, 拡大 L/K を巡回拡大という.

したがって, 有限体 K の有限次拡大は巡回群である.

【有限体のガロア対応】

L/K を有限次ガロア拡大, $G = G(L/K)$ をそのガロア群とする. M を L/K の中間体とすると, L/M はガロア拡大でそのガロア群 $H = G(L/M)$ は, G の部分群である. そして, ガロア群の定義からの H 不変体 (または, 固定体) について, $i(H) = M$ が成り立つ.

特に, $K = GF(q)$, $L = GF(q^f)$ のとき, $M = GF(q^e)$ が L/K の中間体であるならば, $e \mid f$ だから $f = es$ とおく. このとき L/M 拡大はガロア拡大で, $[L : M] = s$ であるから, そのガロア群 $G(L/M)$ は位数 s の巡回群である. $G(L/M)$ の生成元としては σ^e がとられる.

ガロア拡大の中間体全体の集合とガロア群の部分群全体の集合には, 1対1の対応 ($M \leftrightarrow H$) が存在する.

これをガロア対応という.

3. 有限体のガロア群の例

例

$K = GF(2) = \mathbb{Z}_2$, $F = GF(2^4)$ とする.

(付記)¹⁾

$\mathbb{Z}_2[x]$ の 4 次既約多項式は, $x^4 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ の 3 つのみであることが知られている.

そこで定理 2.1 より, 例えば

$$F = \mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1), \quad \alpha = x + (x^4 + x + 1), \quad \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$$

とすることができて

$$F = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{13}, \alpha^{14}\}$$

と表される.

定理 2.2 または定理 2.3 より, F は $\varphi(x) = x^{2^4} - x = x^{16} - x$ の最小分解体であり, $[F:\mathbb{Z}_2] = 4$ となっている.

また, 定理 2.3 により F/\mathbb{Z}_2 はガロア拡大である. そして, 定理 2.4 よりガロア群 $G = G(F/\mathbb{Z}_2)$ は

$$\sigma: \beta \rightarrow \beta^2 \quad (\beta \in F)$$

で生成される位数 4 の巡回群 $G = \{1_F, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ である.

G の真部分群で単位群と異なるものは, σ^2 で生成される位数 2 の巡回群 $H = \{1_F, \sigma^2\}$ のみである. H に対応する F/\mathbb{Z}_2 の中間体 M は 1_F と σ^2 によって不変に保たれる F の元の全体である.

さて, F の $0, 1$ 以外の各元に σ^2 を施すと

$$\alpha \rightarrow \alpha^4,$$

$$\alpha^2 \rightarrow \alpha^8,$$

$$\alpha^3 \rightarrow \alpha^{12},$$

$$\alpha^4 \rightarrow \alpha^{16} = \alpha,$$

$$\alpha^5 \rightarrow \alpha^{20} = \alpha^5,$$

$$\alpha^6 \rightarrow \alpha^{24} = \alpha^9,$$

$$\alpha^7 \rightarrow \alpha^{28} = \alpha^{13},$$

$$\alpha^8 \rightarrow \alpha^{32} = \alpha^2,$$

$$\alpha^9 \rightarrow \alpha^{36} = \alpha^6,$$

$$\alpha^{10} \rightarrow \alpha^{40} = \alpha^{10},$$

$$\alpha^{11} \rightarrow \alpha^{44} = \alpha^{14},$$

$$\alpha^{12} \rightarrow \alpha^{48} = \alpha^3,$$

$$\alpha^{13} \rightarrow \alpha^{52} = \alpha^7,$$

$$\alpha^{14} \rightarrow \alpha^{56} = \alpha^{11}$$

であることから

$$M = \{0, 1, \alpha^5, \alpha^{10}\} = GF(2^2)$$

となっていることがわかる.

以上

参考文献

- 1) 増田真郎「応用のための代数系入門」サイエンス社, 1981
- 2) 貴田研司, “大学初年次における数学教材の提案 (その 11) ～有限体入門～,” 東海大学紀要情報通信学部, Vol. 10, No. 1, 2017, pp. 105-113

大学初年次における数学教材の提案（その 32）

～ガロア群の軌道～

貴田研司*¹

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 32 ～ The Orbits of Galois Groups ～

by

Kenshi KIDA *¹

(received on Nov. 29, 2019 & accepted on Jan. 9, 2020)

あらまし

分離多項式のガロア群の根の全体の集合への作用について、この場合に群の軌道がどうなるかを明らかにする。それから、具体的な計算例を挙げることにより、理解を助けることとする。

Abstract

First, we explain the orbits of Galois groups of separable polynomials with respect to actions to the set of the roots of polynomials. Further, we present examples of the orbits of Galois groups.

キーワード：ガロア群の軌道，多項式の根，群の作用

Keywords: Orbit of Galois Group, Roots of Polynomial, Action of Group

1. はじめに

n 次分離多項式 $f(x)$ のガロア群 G は、 $f(x)$ の n 個の異なる根の全体からなる集合の置換群として捉えられる。この論文では、ガロア群 G の、 $f(x)$ の n 個の異なる根の全体からなる集合への作用を考えたときの群の軌道について解説する。さらに、具体的に計算した例を挙げるが、特に有限体の場合が興味深い。

本論文の執筆にあたっては、増田真郎「応用のための代数系入門」¹⁾を大いに参考にした。

2. 群の作用²⁾

群 G と集合 Ω に対して、写像

$$G \times \Omega \ni (a, x) \mapsto ax \in \Omega$$

が次の 2 つの条件を満たすとき、 Ω 上の G の作用という。

$$(i) \quad (ab)(x) = a(bx) \quad (a, b \in G, x \in \Omega)$$

$$(ii) \quad ex = x \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

Ω 上の G の作用が定義されているとき、 G を Ω 上の変換群といい、 (G, Ω) と表す。

*1 高輪教養教育センター 准教授

Liberal Arts Education Center, Takanaawa Campus, Associate
Professor

定理

$a \in G$ を固定する. このとき写像

$$T_a : \Omega \ni x \mapsto ax \in \Omega$$

は 1 対 1 かつ上への写像である. 言い換えれば, T_a は Ω の置換である.

$\Omega \ni x, y$ に対して

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } a \in G \text{ が存在して, } ax = y$$

と定義すれば, \sim は同値関係である.

この同値関係 \sim で類別したときの各同値類のことを G の軌道という.

3. ガロア群の軌道

$K[x]$ の分離多項式 $f(x)$ のガロア群を G とする. また, $f(x)$ の根全体からなる集合を

$$W = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

とする. $f(x)$ の $K[x]$ における既約多項式への分解を

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_r(x)$$

とすると, $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) の根の全体からなる集合を C_i とすれば, W は

$$W = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r, \quad C_j \cap C_k = \emptyset \quad (j \neq k)$$

のように類別される.

一方, α を C_i の任意の元とすると, $\beta \in W$ に対して

$$p_i(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = \sigma(\alpha) \text{ であるような } \sigma \in G \text{ が存在する}$$

であることが知られている.

したがって, 各 C_i は G の元によって互いに写り得る $f(x)$ の根の全体になっている. この意味で, 各 C_i を W における G の軌道という.

次に, 有限体のガロア群の軌道について述べる. F を有限体 $K = GF(q)$ の f 次拡大体, $G = G(F/K)$ をガロア拡大 F/K のガロア群とする. F は K 上の分離多項式

$$\varphi(x) = x^{q^f} - x$$

の根の全体であるから, F は G の軌道に分解され, G の軌道と $\varphi(x)$ の $K[x]$ における既約多項式とが 1 対 1 に対応する.

一方, $\varphi(x)$ は f の約数を次数にもつ, $K[x]$ のすべてのモニックな既約多項式の積となる. すなわち

$$\varphi(x) = \prod_{d|f} p_d(x) \quad (\deg p_d(x) = d)$$

が成り立つ.

したがって, F を G の軌道に分解することによって, 次数が f の約数である $K[x]$ のすべての既約多項式が求められる.

また, ガロア群 G は $\sigma: \beta \mapsto \beta^q$ によって生成される.

4. ガロア群の軌道の例

例 1

分離多項式 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15 \in \mathbb{Q}[x]$ のガロア群の軌道について考える.

$f(x)$ の $\mathbb{Q}[x]$ における因数分解は, $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$ である.

さらに $f(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ であるから, その根の全体の集合を W とすると

$$W = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$$

である. また, $x^2 - 3$ の根全体の集合を $C_1 = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ として, $x^2 - 5$ の根全体の集合を $C_2 = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ とすれば

$$W = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \cup \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\} = C_1 \cup C_2$$

が成り立つ.

さて, $f(x)$ の最小分解体は $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ で, $[L: \mathbb{Q}] = 4$ である.

したがって, L のガロア群を G とすると $|G| = 4$ で, 次の 4 つの元からなる.

$$1_L: \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}, \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5},$$

$$\sigma: \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}, \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5},$$

$$\tau: \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}, \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5},$$

$$\rho: \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}, \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$$

とすれば

$$1_L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \leftrightarrow 1,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \leftrightarrow (1,2),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \leftrightarrow (3,4),$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \leftrightarrow (1,2)(3,4).$$

よって

$$G \cong \{e, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$$

である。この群では

$$\sigma^2 = \tau^2 = \rho^2 = 1_L,$$

$$\sigma\tau = \tau\sigma = \rho,$$

$$\tau\rho = \rho\tau = \sigma,$$

$$\rho\sigma = \sigma\rho = \tau$$

が成り立っているので、 G は、クラインの四元群に同型であることがわかる。

さらに上記より、ガロア群 G の軌道が C_1, C_2 となっていることも示される。

以上

例 2 (有限体のガロア群の軌道)

$p(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ について考える。 \mathbb{Z}_2 上可約ならば 1 次因子 $x, x + 1$ をもつ。ところが

$$p(0) = 1 \neq 0, p(1) = 1 \neq 0$$

なので、 x でも $x + 1$ でも割り切れないので \mathbb{Z}_2 上既約である。

$K = GF(2) = \mathbb{Z}_2, F = GF(2^3)$ とする。ここで例えば

$$F = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1), \alpha = x + (x^3 + x + 1), \alpha^3 + \alpha + 1 = 0$$

とすることができて

$$F = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$$

と表される。

F は $\varphi(x) = x^{2^3} - x = x^8 - x$ の最小分解体 (根の全体) であり、 $[F:\mathbb{Z}_2] = 3$ となっている。

また、 F/\mathbb{Z}_2 はガロア拡大であり、ガロア群 $G = G(F/\mathbb{Z}_2)$ は

$$\sigma: \beta \mapsto \beta^2 \quad (\beta \in F)$$

で生成される位数 3 の巡回群 $G = \{1_F, \sigma, \sigma^2\}$ である。

まず、 $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$ であるから、 $C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}$ である。

また、 σ を F の 0 と 1 以外の元に次々に施すと

$$\alpha \mapsto \alpha^2 \mapsto \alpha^4 \mapsto \alpha^8 = \alpha,$$

$$\alpha^3 \mapsto \alpha^6 \mapsto \alpha^{12} = \alpha^5 \mapsto \alpha^{10} = \alpha^3$$

となるから、 G の軌道は

$$C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}, C_2 = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}, C_3 = \{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$$

である。

さらに、軌道 C_2 に対応する $\mathbb{Z}_2[x]$ の既約多項式は

$$(x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^4) = x^3 + x + 1$$

であり、軌道 C_3 に対応する $\mathbb{Z}_2[x]$ の既約多項式は

$$(x - \alpha^3)(x - \alpha^5)(x - \alpha^6) = x^3 + x^2 + 1$$

である。したがって

$$\varphi(x) = x^{2^3} - x = x^8 - x = x(x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

が成り立つことがわかる。

以上

参考文献

- 1) 増田真郎「応用のための代数系入門」サイエンス社, 1981
- 2) 桂利行「代数学 I 群と環」東京大学出版会, 2004

高輪キャンパスにおける健康スポーツ科目の新たな取り組み

北濱 幹士^{*1}, 高木 由起子^{*2}, 早川 みどり^{*2}, 大岡 直美^{*2},
藤原 豊樹^{*2}, 野澤 隆司^{*2}, 光本 健次^{*2}

Reformation of the Physical Education Program at Takanawa Campus

by

Kanji KITAHAMA^{*1}, Yukiko TAKAGI^{*2}, Midori HAYAKAWA^{*2}, Naomi OOKA^{*2},
Toyoki FUJIWARA^{*2}, Takashi NOZAWA^{*2} and Kenji MITSUMOTO^{*2}

(received on Sep.12, 2019 & accepted on Jan.9, 2020)

あらまし

高輪キャンパスで開講している健康スポーツ科目（健康・フィットネス理論実習，生涯スポーツ理論実習）において，学生・教員のより良い教育環境の構築を目的に2019年度より実施した健康スポーツ科目の改革（開講コマ数削減，教場混雑回避，非常勤講師の連携など）について報告する．健康・フィットネス理論実習は科目内容が多岐に渡るため複数教員で担当し，生涯スポーツ理論実習は履修者全員で同一科目を実施するため，単数教員担当とした．これらの教員配置に基づき，科目運用上の見直し，教場の整理，そして健康推進室と学生の健康に関して協同で新たな取り組みを実施した．

Abstract

This report explains reformation of the Physical Education Program at Takanawa Campus from 2019 Spring. The Program includes two courses: Theory and Practice of Health Sports (TPHS), and Theory and Practice of Lifelong Sports (TPLS). An example of the reformation is that three instructors are taking charge of TPHS (rather than one instructor, as in the past), because the content of the class covers such a wide range. Another example is the students choose two different sports from table tennis, badminton, and volleyball (rather than having no choice, as in the past) in TPLS. The new approach includes cooperation with the Health Care Promotion Office, Takanawa Campus.

キーワード:一般体育, 高輪キャンパス, 科目内での取り組み

Keywords: Physical Education Program, Takanawa Campus, Initiatives at Subject

1. はじめに

東海大学は、「若き日に汝の体躯を養え」という建学の精神に則り，2010年度のカリキュラム改訂より現代教養科目の一つとして健康スポーツ科目が全学部必修科目となった¹⁾．この必修となった健康スポーツ科目とは，“健康とからだ”をテーマに学ぶ「健康・フィットネス理論実習」（以後，健康・フィット）と“生涯スポーツ”がテーマである「生涯スポーツ理論実習」（以後，生スポ）の二科目である²⁾．この二科目は，東海大学全キャンパスにて同一のシラバスを用いて実施されている．但し，各キャンパスによる諸事情（教員配置数，教場，授業運用など）を含む科目詳細については，各キャンパスの一般体育研究室にて調整されている．

2. 高輪キャンパス一般体育研究室

高輪キャンパス一般体育研究室は，専任教員1名と非常勤講師複数名⁺¹で構成しており，2018年度は10名，2019年度は9名で運用している．2018年度の一般体育研究室関連コマ数は，77科目（春学期33科目，秋学期34科目），2019年度は54科目（春学期27科目，秋学期27科目）である．教員によって多少の異なりはあるが，一人当たり半期で2科目から6科目を担当している．高輪キャンパス内の主な教場は，アリーナ（4号館4階），フィットネスルーム（4号館地下2階），そして一般教室である．

本稿の題目でもある『高輪キャンパスにおける新たな取り組み』は，学生・教員のより良い教育環境の構築を目指して2018年度より始めた．2018年度は，授業運営上の環境整備として，一般体育研究室内の不要品除却等を実施した．また，アリーナ倉庫に棚を搬入・設置し，一般体育研究室（地下2階）からの物品移動

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

*2 高輪教養教育センター 一般体育非常勤講師
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Lecturer

+1 高木 由起子：星槎大学 専任講師
早川 みどり：電気通信大学 非常勤講師
大岡 直美：執行バレースクール 助教師
藤原 豊樹：日本体育大学 非常勤講師
野澤 隆司：ノザワヘルスケアクラブ代表
光本 健次：元東海大学教授

の時間削減を講じた。そして、2019年度より健康スポーツ科目の授業内容改善に着手した。

2.1 2018年度の科目運営状況全容

高輪一般体育研究室が担当している情報通信学部は4つの学科がある（各学科定員80名）。各学科の男女比率等を考慮しながら、1つの学科を半分に分け、春学期が健康・フィットまたは生スポ、そして秋学期は履修していなかった科目を履修するよう春学期のガイダンス時に指導していた。

健康・フィットは、学科の半数である約40名を更に2分割し、1コマ20名前後で教員一人が担当していた。なお、秋学期のみ再履修学生用として水曜4時限目に1コマのみ開講していた（Table 1 参照）。

生スポは、実習可能な教場がアリーナに限定されているため、実施種目をバレーボールと卓球に限定した。二人の教員が担当し、履修者の半分にあたる約20名で前後半6回ずつ別々の種目を受講していた（Table 2 参照）。

Table 1 Theory and Practice of Health Sports in 2018.

2018年度 健康・フィットネス理論実習					
前 期			後 期		
曜日/時限	人数	教員	曜日/時限	人数	教員
月曜/1限	18	光本	月曜/1時限	20	光本
月曜/2限	26	光本	月曜/2限	19	光本
月曜/3限	23	光本	月曜/3限	17	光本
月曜/4限	18	光本	月曜/4限	21	光本
水曜/1限	22	野澤	水曜/2限	21	北濱
木曜/1限	23	野澤	水曜/4限	5	野澤
木曜/2限	20	野澤	木曜/1限	24	野澤
木曜/4限	24	北濱	木曜/2限	11	野澤
			木曜/3限	22	野澤

Table 2 Theory and Practice of Lifelong Sports in 2018.

2018年度 生涯スポーツ理論実習					
前期			後期		
曜日/時限	人数	教員	曜日/時限	人数	教員
月曜/3限	48	北濱 早川	月曜/1限	49	北濱 藤原
月曜/4限	42	北濱 早川	月曜/2限	45	北濱 藤原
木曜/1限	38	北濱 早川	月曜/3限	40	北濱 早川
木曜/4限	37	早川 高木	木曜/3限	37	北濱 高木
			水曜/2限	11	藤原

3. 健康スポーツ科目の改善点

2019年度からの健康スポーツ科目の新たな取り組みは高輪キャンパスに限定したものである。2019年度時間割作成の際、2018年度までの開講科目数及びコマ数、それらの科目における履修状況を確認した上で、非常勤講師と教学教務担当者へ履修に関する聞き取り調査をし、2019年度から健康・フィットと生スポ科目において新たな取り組みを実施する事とした。具体的には、実習科目を削減し、講義科目を増加させ、必修科目である健康・フィットと生スポ科目にて改善を加えた。

新たな取り組みを始めるにあたり、非常勤講師には、専門的な知識をより多くの学生に教授するため、また科目目的の更なる遂行のための改善であることを伝えた。非常勤講師が専門分野なども含め互いを理解し、コミュニケーションが取れる高輪キャンパス一般体育研究室を目指すことも併せて伝えた。なお、非常勤講師の担当コマ数は可能な限り維持し、科目内容についてはもう一度で精査して頂くことを依頼した。

3.1 健康・フィットネス理論実習の改善点

各学科1コマの開講とし、複数教員での担当に変更し、その内の一名は女性教員が担当する事とした。2018年度までのように一人の教員が全14回の授業を行うのではなく、5回目から13回目まではバリエーションに富んだ教員の専門性を活かした実習になるようにした。なお、再履修学生用の時限は開講せず、4回の開講コマのいずれかにて履修させることとした。

次の改革は教場の整理である。主な教場が2ヶ所に限定されており、教員同士の話し合いや授業内容によって教場移動を行っていた。そこで、健康スポーツ科目内における体育施設のバッティングを避けるため、健康スポーツ科目の同時限開講は避ける事とした。また、一般教室でのストレッチング、校舎内階段や屋上庭園（2号館4階・1号館5階）を利用するなど、スポーツの実施場所は多岐に渡る事を学生に紹介するよう試みた。

最後に科目内容の見直しである。各担当教員に委ねられていた科目内容（課題等）を統一化し、学生間の混乱が無いようにした。具体的には、1回目のガイダンスにて一般体育教務委員が科目の内容・目的を説明し、4回目の講義にもスピーカーとして参加した（3.3にて後述）。また、高輪キャンパスでは実施されていなかった新体力テストの1項目である50M走の実施を決めた。本科目の教科書別冊ワークブック内「体力・運動能力の記録、体力プロフィールの作成」が作成不可能な状態になっていたからである。しかし、本キャンパスの立地上、直線で50Mを確保する事は非常に困難である。従って、履修学生には50M走実施前に実施する意図を説明した上で、必ずしも適切な場所ではない、2号館後ろから裏倉庫へと続くコンクリートの狭い通路にて測定をした。なお、ゴール地点のフェンス、ゴール後の奥行が短い事も伝え、十分に注意喚起したうえで実施した。

3.2 生涯スポーツ理論実習の改善点

2018年度までは二人の教員で担当していたが、2019年度より一人体制とした。履修学生全員でスポーツを楽しむ事を目的の1つとして位置付けた。なお、1コマ当りの履修学生の人数は、学科定員の半分である40名を春学期の定員とし、キャンパスライフに慣れたであろう秋学期は40名以上の履修学生を受け入れる事とした。また、再履修学生は秋学期の4コマ開講内にて履修をさせることとした。

健康スポーツ科目の同一時間開講を取りやめた為、生スポでアリーナ全面を占有できるようになり、他科目との教場調整は不要となった。

最後に科目内容についてである。2018年度は、卓球とバレーボールを6回ずつ実施し、履修者が教員間を移動する形式で実施していた。しかし、担当教員の一人体制、また、教場の占有などを踏まえ、40名程度の学生がアリーナで実施可能な3種目（卓球、バドミントン、バレーボール）より2種目をガイダンス時に履修者で選択し、実施する事とした。

3.3 高輪健康推進室との連携

高輪一般体育研究室では、学生や教職員のQuality of Life向上を目的とした「東海大学KENKOプロジェクト」の一環として、学生の健康サポートを担う高輪健康推進室と連携した取り組みを健康・フィットにて構築、実施した。具体的には、4回目の授業にて高輪健康推進室保健技術員より「食育」をテーマとし、学生の日々の食事に振り返りを含めた講義を実施した。また、一般体育教務委員による「たばこ・薬物」についての講義も同時間に取り入れた。

次に、健康推進室に設置しているInBody⁺²を活用した課題を設定した（体力測定結果及びInBody測定結果からの現状分析と授業から取り入れる自分自身の健康・体力の改善について）。ガイダンス時に課題説明をし、4回目の授業までに1度目の測定、13回目の授業までに2度目の測定を実施し、14回目に課題提出とした。これにより、本科目の履修者全員が学期中に最低2度は健康推進室を訪れる事を意図的に持つ事ができた。なお、InBody測定結果については、エアロビクス運動の講義にて詳細説明を行った。

3.4 フィットネスルームの配置換え

快適な実習環境を整えるためにフィットネスルームの配置換えを2018年度の学期末に行った（Fig. 1, 2参照）。フィットネスルームの奥側をマシンエリア、手前側をスタジオエリアと位置づけた。マシンエリアは、エアロビクス運動が快適に実施できるようエアロバイクを中心に置き、トレッドミル2台を横に並べた。それらエアロビクス機器の半周を、マシントレーニング機器で囲った。なお、マシンは上半身・下半身が交互に行えるよう設置した。その他、バランスボール棚を設置し、バランスボール、フリーウエイトが日常的に使用可能な状態とした。また、長

机と椅子を設置し、机上でのノートテイクを可能とした。



Fig.1 Before Changing of the Fitness Room



Fig.2 After Changing of the Fitness Room

4. 科目担当教員及び健康推進室より

各科目担当教員より新たなる取り組みについてのコメントを収集した。質問項目は、①科目教員数について、②教場について、③授業運営整理について、それぞれのメリット・デメリット、留意点・課題点である。また、健康推進室には、①健康・フィットネス理論実習講義への参加について、②InBody測定（健康推進室訪問）について、メリット・デメリット、留意点・課題点について質問し、以下の回答を得た。

4.1 健康・フィットネス理論実習担当教員より

<教員配置：メリット>

- ・複数教員で学生を見ることにより、学生の色々な面を知ることができた。
- ・各担当教員の専門を活かしながら授業を進める事ができた。
- ・学生にとっても大変ユニークで楽しい授業であったものと考えられる。
- ・担当学生の人数が少なく、手厚い指導ができる。

<教員配置：デメリット>

- ・教員によって学生対応の差や違いが出過ぎないように気を使った。

+2 InBody（体成分分析装置）：<https://www.inbody.co.jp>
（最終閲覧日 2019年7月31日）

- ・主担当教員の進め方の違いに混乱した。

<教場整理：メリット>

- ・教場が変わることで、学生が注意して連絡事項を聞いているように見受けられた。
- ・その教場に合わせた工夫をしていくため、教員側の指導方法の幅が広がった。
- ・授業内容に応じて教場が変わるため、毎回新鮮味があったのではないだろうか。
- ・中弛みのような様子がほとんど見られなかった。
- ・教員同士で調整し、改善を図れば問題ない。
- ・少人数での授業展開であるため、広々と余裕をもって授業ができた。

<教場整理：デメリット>

- ・フィットネスルームを複数教員（別内容）で使用する場合、授業内容によっては集中しづらい。
- ・3回という時間的な制約があるため教えられる範囲が限られる。しかし、制約があるからこそ教える側もポイントを絞って指導するため、学生にとっては適度な量ではないかと思う。
- ・教場が毎回変わるため、更衣室付近でどこに行けばよいか迷っている学生が見受けられる（前回欠席者や教員の指示を聞いていない学生）。

<教場整理：課題点・留意点>

- ・トレッドミル、エルゴメーターでトレーニングする際、VO2max60%程度の負荷で行わせると大量の汗が出るため、扇風機などの導入を希望する。

<授業運営：メリット>

- ・専門内容を教授するため、自分の担当を全うでき、他教員の指導や運営方法を参考にすることが出来た。また、多くの学生たちに授業ができる。
- ・健康推進室との連携は学生たちの身体的、精神的な健康状態を共有できるため、欠席・休学・退学などの防止に繋がると考えられる。

<授業運営：デメリット>

- ・同じ授業内容を3セット行ったが、グループごとの内容に差が出ないように気を使った。
- ・3回1セットの授業だと、授業内だけで筋力が向上したことを実感させることは難しい。いかに筋力トレーニングの効果を理解し、その後も継続させるかが課題である。

<授業運営：課題点・留意点>

- ・曜日によって授業担当教員が異なるため、進め方の違いに混乱した。
- ・ワークブックの提出方法、評価方法、そしてレポートの採点などを曜日ごとではなく、科目で統一する必要がある。

4.2 生涯スポーツ理論実習担当教員より

<教員配置：メリット>

- ・授業展開がしやすくなった。

<教場整理：メリット>

- ・アリーナが全面使用でき広く使用できた。

<授業運営：メリット>

- ・ワークブックや出席カードの管理がしやすい。
- ・一律した評価で成績をつけることができる。

<授業運営：デメリット>

- ・学生同士のコミュニケーションが減った。
- ・学生数が多く、手厚くできない事があった。
- ・一人一人と対話する時間が減った。
- ・出席、授業説明等の時間が長くなった。

<授業運営：留意点・課題点>

- ・レクリエーション的なコミュニケーションに特化した遊びを取り入れていく必要がある。

4.3 健康推進室より

<講義への参加：メリット>

- ・学生があまり興味のない言葉「生活習慣病」について、身近な病気と食生活から説明することができた。
- ・内容を理解した学生は、後日健康推進室に来室し、食生活を見直したことや、塩分摂取について話をしてくれた。

<InBody測定について：メリット>

- ・来室する学生と会話することにより、様子のおかしい学生をチェックすることができる。
- ・健診時に不備があり、呼び出しをしたが応じない学生をキャッチすることができる。
- ・健康推進室の場所の認知、学生相談などのフォロー体制について周知することができる。
- ・学生自身は食生活や運動の見直しのきっかけとなり、保健師にアドバイスを求めることができる。

<InBody測定について：デメリット>

- ・相談室前に設置しているため、カウンセリング中の測定は少々騒がしいと感ずることがある。
- ・1回の測定に約3分を要するため、授業間の休み時間では測定を終えるのが難しい。

5. まとめ

若き日に汝の体躯を養うためには、履修学生一人一人に対する極め細やかな対応が求められると考えている。より良い教育の構築・展開には現状維持で満足せず常に改善が、そして新しい取り組みが求められるであろう。今後も高輪キャンパスのメリットを最大限に生かした新たな教育活動が展開できるよう積極的に挑戦していきたい。

参考文献

- 1) 大学体育自己点検・評価報告書
<http://daitairen.or.jp/2013/wp-content/uploads/2013/04/026e8c6212c3615bfe9865fd051d8c06.pdf>
 (最終閲覧日 2019年7月31日)
- 2) 授業要覧 2019 情報通信学部, 東海大学, ppⅢ - 5, 2019

東海大学情報通信学部紀要委員会

委員長 高山佳久
委員 山田光穂
委員 今村誠
委員 森山弘海
委員 ファイン ゲーリー スコット

EDITORIAL COMMITTEE OF PROCEEDINGS OF
THE SCHOOL OF INFORMATION
AND TELECOMMUNICATION
ENGINEERING
TOKAI UNIVERSITY

Chairman Yoshihisa TAKAYAMA
Member Mitsuho YAMADA
Makoto IMAMURA
Hiroumi MORIYAMA
Gary Scott FINE

本紀要の論文は、情報通信学部紀要委員会で
査読・審査を受け、掲載可と判定された原著
論文である。

東海大学紀要 情報通信学部

Vol. 12 No. 2 2019

2020年3月31日 発行

発行所 東海大学出版部

〒259-1292 神奈川県平塚市北金目4-1-1

tel 0463-58-7811

(港北出版印刷株式会社)

