東海大学紀要情報通信学部
Vol.17,2024,pp.14-19

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 47）
～ 無理関数の積分公式 ～

貴田 研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.47
~ Indefinite Integral Formula for Irrational Functions ~

by

Kenshi KIDA*1

(received on Dec.3,2024 & accepted on Jan.30,2025)

あらまし

本論文においては，まず無理関数の積分についての一般論について述べる．そして，特に重要と思われる 4 つの公式を選んで詳しく解説する．

Abstract

In this paper, first we give general theory of indefinite integral of irrational functions. Further we present details of the selected 4 important formulas.

キーワード：無理関数，置換積分，部分積分
Keywords: *Irrational Function, Integration by Substitution, Integration by Parts*

1. はじめに

大学初年次における微分積分の授業において，不定積分としては，基本的な関数の不定積分，置換積分法，部分積分法，有理関数の積分について講義と演習を行うが，無理関数の積分については多くの時間を割くことが出来ないのが現状である．

本論文では，無理関数の積分について重要と思われる，次の 4 つの公式

(i) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

(ii) $$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right) + C \quad (A \neq 0)$$

(iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

(iv) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

についての解説を試みたい．

証明の方針としては，最短いものを選ぶだけでなく，計算量が増えたとしても読者にとって受け入れやすいもの，そして微分積分の計算に習熟してもらうことにつながるものを選んでみた [1)2)3)4)5)6)]．

*1 理系教育センター 教授
STEM Education Center，Professor

2. 無理関数を含む関数の積分

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\left(D=b^2-4ac \neq 0,\ a \neq 0\right)$の有理関数を $R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ と表すとき，不定積分

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$

の計算方法について述べる.

（I）$a>0$ の場合

① $D>0$ のとき $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$ とおく.

㋐ $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,(x-\beta)\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$

であり

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}=t$$

すなわち

$$x=\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2}$$

と置換する.

㋑ $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$

すなわち

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

と置換する.

②$D<0$ のとき

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$$

すなわち

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

と置換する.

（II）$a<0$ の場合

① $D>0$ のとき $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<x<\beta)$ とおく.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\,(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

であり

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$$

すなわち

$$x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2}$$

と置換する.

② $D<0$ のとき $ax^2+bx+c<0$ となるから，この場合は除く.

3. 無理関数の積分公式

(i) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C\quad(A\neq 0)$

（証明 1）

$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$ として，$t=x+\sqrt{x^2+A}$ とおけば，$y=\log|t|$ となるから，合成関数の微分法によって

$$\begin{aligned}
y'&=(\log|t|)'\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)'\\
&=\frac{1}{t}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}\right)\\
&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(\frac{\sqrt{x^2+A}}{\sqrt{x^2+A}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)\\
&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\frac{x+\sqrt{x^2+A}}{\sqrt{x^2+A}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}
\end{aligned}$$

（証明 2）

$A>0$ の場合は第 2 章の(I)②に相当し，$A<0$ の場合は第 2 章の(I)①㋑に相当することに留意されたい.

$\sqrt{x^2+A}=t-x$ すなわち $t=x+\sqrt{x^2+A}$ とおけば $x^2+A=t^2-2tx+x^2$ すなわち $A=t^2-2tx$ であるから

$$x=\frac{t^2-A}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{A}{t}\right)$$

となる．そして

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{t^2}+\frac{A}{t^2}\right)=\frac{t^2+A}{2t^2}$$

だから

$$dx=\frac{t^2+A}{2t^2}dt$$

である．また

$$\sqrt{x^2+A}=t-x=t-\frac{t^2-A}{2t}=\frac{2t^2}{2t}-\frac{t^2-A}{2t}=\frac{t^2+A}{2t}$$

であるから

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{2t}{t^2+A}\frac{t^2+A}{2t^2}dt=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$$

(ii) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)+C\quad(A\neq 0)$

（証明）

$I=\int\sqrt{x^2+A}\,dx$ とおく．部分積分法によって

$$I=\int 1\cdot\sqrt{x^2+A}\,dx=x\sqrt{x^2+A}-\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx\cdots①$$

となる．ここで

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\sqrt{x^2+A}\,dx-A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

を，①に代入して，(i) の結果を使うと

$$I=x\sqrt{x^2+A}-\left(\int\sqrt{x^2+A}\,dx-A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx\right)$$

$$I=x\sqrt{x^2+A}-I+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

であるから

$$2I=x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

すなわち

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)+C$$

が得られる．

(iii) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$

（証明）

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}dx\cdots②$$

ここで

$t=\dfrac{x}{a}$ とおけば，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{a}$ すなわち $dt=\dfrac{1}{a}dx$

であるから，②は

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sin^{-1}t+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

(iv) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+C \quad (a>0)$

（証明 1）

x の取り得る範囲が$-a \leqq x \leqq a$ であることに注意すれば，$x=a\sin t$ とおき，t の動く範囲を$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ としてよい．このとき

$$\sin t=\frac{x}{a} \quad \text{すなわち} \quad t=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

となっていることにも留意されたい．

さて

$$\frac{dx}{dt}=a\cos t \text{ すなわち } dx=a\cos t\,dt$$

であるから，置換積分法によって

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt\\ &= \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cdot a\cos t\,dt\\ &= \int a\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt\\ &= a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt\\ &= a^2\int \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt \cdots ③\end{aligned}$$

ところが，$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲では，$\cos t \geqq 0$ となることから$\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ であり

$$③=a^2\int \cos^2 t dt$$

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2} \text{ だから}$$

$$\begin{aligned}&= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t\right)+C\\ &= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{\cos^2 t}\right)+C\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + ax\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

（証明 2）

$J = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$ とおく．部分積分法によって

$$J = \int 1\cdot\sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \cdots ④$$

となる．ここで

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

を，④に代入して，(iii) の結果を使うと

$$J = x\sqrt{a^2-x^2} + \left(-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\right)$$

$$J = x\sqrt{a^2-x^2} - J + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

であるから

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

すなわち

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

が得られる．

参考文献

1) 矢野健太郎、石原繁 編「微分積分（改訂版）」裳華房，1991

2) 水本久夫著「微分積分学の基礎」培風館，1993

3) 三村征雄「微分積分学I」岩波全書, 1970

4) 三宅敏恒「入門微分積分」培風館, 1992

5) 福田安蔵、鈴木七緒、安岡善則、黒崎千代子 共編「詳解微積分演習I」共立出版，1960

6) 杉浦光夫、清水英男、金子晃、岡本和夫 共著「解析演習」東京大学出版会，1989