

大学初年次における数学教材の提案（その 48） ～ 連立方程式の解の表し方 ～

貴田 研司^{*1}

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.48 ～ How to express the Solutions of Simultaneous Linear Equations～

by

Kenshi KIDA^{*1}

(received on Dec.3,2024 & accepted on Jan.30,2025)

あらまし

本論文においては、連立一次方程式が無数の解をもつ場合にその解を任意定数を用いて表す方法について述べる．簡単な具体例を交えながら解説する．

Abstract

In this paper, we give explanation of expressions of solutions of indefinite *simultaneous linear equations with arbitrary constant*. We present several simple examples

キーワード : 連立一次方程式, 任意定数, 不定方程式

Keywords: *Simultaneous Linear Equations, Arbitrary Constant, Indefinite Equation*

1. はじめに

大学初年次の線形代数において、次のことを学ぶ．

n 個の未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を含む m 個の方程式からなる連立一次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば、連立一次方程式(*)は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表される．このとき行列 A を連立一次方程式(*)の**係数行列**という．また

$$(A \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

^{*1} 理系教育センター 教授

STEM Education Center, Professor

を(*)の拡大係数行列という.

定理 (連立一次方程式の解)

連立一次方程式(*) $Ax = b$ が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank } A = \text{rank}(A \quad b)$$

が成り立つことである. さらに

- (1) $n = \text{rank } A = \text{rank}(A \quad b)$ ならば, 連立一次方程式(*) $Ax = b$ はただ一つの解をもつ.
- (2) $n > \text{rank } A = \text{rank}(A \quad b)$ ならば, 連立一次方程式(*) $Ax = b$ は無数の解をもち (不定方程式), その解は $(n - \text{rank } A)$ 個の任意定数を用いて表される.

本論文では, 定理(2)にあるような連立一次方程式がもつ無数の解を, 任意定数を用いて表す方法について, 例題を挙げながら解説する.

2. 任意定数を用いた連立一次方程式の解の表し方

[重要] 連立一次方程式において, (未知数の数) $>$ (方程式の本数) 場合には, 無数の個数からなる解をもつ. このときには任意定数を用いて解を表記することができるのであるが, この中に現れる任意定数の個数は

$$(\text{未知数の数}) - (\text{方程式の本数})$$

である.

例題 1

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を, 任意定数を用いて表す.

(解答)

見かけの上では方程式が 2 本であるが, 事実上は $x_1 + x_2 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の 1 本のみである.

このとき, (任意定数の個数) = (未知数の数) - (方程式の事実上の本数) = $2 - 1 = 1$ となっている.

そして, 方程式 $\textcircled{1}$ において, $x_1 = s, x_2 = -s$ (s は任意定数) または, $x_1 = -t, x_2 = t$ (t は任意定数) とおくことができる. よって, この連立一次方程式の解は任意定数を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

または

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

(解答終)

任意定数を用いた表現である $s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ と $t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は、1 つの式と捉えるのではなく、式の集まり（集合）として認識されたい。 $s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ は集合 $\left\{s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid s \text{ は任意定数}\right\}$ を示しており、 $t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は集合 $\left\{t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \text{ は任意定数}\right\}$ を示している。

例えば

1. $s = 1$ の場合には $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $t = -1$ の場合にも、同じ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ を示す.
2. $s = -1$ の場合には $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $t = 1$ の場合にも、同じ $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ を示す.
3. $s = 3$ の場合には $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $t = -3$ の場合にも、同じ $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ を示す.
4. $s = -\frac{1}{5}$ の場合には $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{smallmatrix}\right)$, $t = \frac{1}{5}$ の場合にも、同じ $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{smallmatrix}\right)$ を示す.

となっており、表記の方法が異なるが、上記の2つの集合 $s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ と $t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は一致している。

【補足説明】

例えば

$$A = \left\{ c\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid c \text{ は任意定数} \right\}, \quad B = \left\{ k\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) \mid k \text{ は任意定数} \right\}$$

について、 $A = B$ であることを示してみる。

(証明)

A の任意の元は、 $c\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = -3c\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$ の形をしていることから、 B の元となっていることがわかる。

したがって、 $A \subset B \cdots \textcircled{1}$ となっている。さらに

B の任意の元は、 $k\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) = -\frac{1}{3}k\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ の形をしていることから、 A の元となっていることがわかる。

したがって、 $B \subset A \cdots \textcircled{2}$ となっている。

よって、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ により $A = B$ であることが示された。

(証明終)

さらに、 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ を任意定数とすると

$$c_1\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad c_2\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad c_3\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right), \quad c_4\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right), \quad c_5\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \quad c_6\left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

などがすべて同じ集合であり、他にいくらかでも表記の方法があることが理解されれば十分ではないだろうか。

例題 2

連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を、任意定数を用いて表す.

(解答)

見かけの上では方程式が 3 本であるが、事実上は $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \cdots \textcircled{2}$ の 1 本のみである.このとき、(任意定数の個数) = (未知数の数) - (方程式の事実上の本数) = $3 - 1 = 2$ となっている.2 個の任意定数を用いて解を表すのであるが、その 2 つは x, y, z のいずれでもよいことに留意されたい.

言い換えると、次の (i), (ii), (iii) のいずれでもよいのである.

(i) $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$ (α, β は任意定数) とおく.②に代入すると、 $\alpha - 2\beta + 2x_3 = 0$ より、 $x_3 = \frac{1}{2}(-\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{2}\alpha + \beta$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\frac{1}{2}\alpha + \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\gamma = \frac{1}{2}\alpha \right)$$

(ii) $x_2 = r, x_3 = s$ (r, s は任意定数) とおく.②に代入すると、 $x_1 - 2r + 2s = 0$ より、 $x_1 = 2r - 2s$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r - 2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $x_1 = t, x_3 = u$ (t, u は任意定数) とおく.②に代入すると、 $t - 2x_2 + 2u = 0$ より、 $x_2 = \frac{1}{2}(t + 2u) = \frac{1}{2}t + u$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t + u \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(v = \frac{1}{2}t \right)$$

(解答終)

参考文献

- 1) 川原雄作、木村哲三、藪康彦、亀田真澄 共著「線形代数の基礎」共立出版, 1994
- 2) 川原雄作、木村哲三、新妻弘、亀田真澄 共著「詳解線形代数の基礎」共立出版, 2001
- 3) 裕野敏博、加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書, 1994