東海大学紀要情報通信学部
Vol.17,2024,pp.24-28

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 49）
～変数分離形微分方程式を解く上での注意～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.49
~Notes on Solving Differential Equations Separate Variable Form~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Dec.3,2024 & accepted on Jan.30,2025)

あらまし

本論文においては，変数分離形微分方程式の解法における留意点について，初学者にとってひっかり易いものを選んび，具体例を交えながら解説する．

Abstract

In this paper, we give explanation of pointe to notes for methods of solutions of differential equations separate variable form We present several concreate examples

キーワード：変数分離形微分方程式，任意定数，一般解，特殊解，絶対値記号

Keywords: *Differential Equation Separate Variable Form, Arbitrary Constant, General Solution, Special Solution, Absolute Value Symbol*

1. はじめに

変数分離形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \cdots ①$$

について

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

であるから，両辺を x で積分すれば

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C \qquad (C \text{ は任意定数 })$$

となるが，左辺に置換積分を用いて，一般解

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C \cdots ②$$

が得られる．

上の解法で，方程式①からただちに微分の間の関係式

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

を導き，両辺を形式的に積分して，一般解

*1 理系教育センター 教授
STEM Education Center，Professor

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C \cdots ② \qquad (C \text{ は任意定数})$$

を導くこともできる．

微分方程式の一般解は，変数の間の最も一般的な関係を表すものであるから，積分を行うときに現れる任意定数を省いてはならない．

本論文では，任意定数の書き換え方についての解説と本来の不定積分では

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となるが，変数分離形微分方程式の解法においては対数の真数の絶対値記号を省略して

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log t + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

としても同じ結果が得られることを，例題を挙げるなどして解説したい．

2. 変数分離形微分方程式の解法

例題 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+2x^2)(1+y^2)}{xy}$$

を解け．

（解答）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x^2}{x} \cdot \frac{1+y^2}{y}$$

すなわち

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1+2x^2}{x}dx.$$

両辺を形式的に積分すると

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1+2x^2}{x}dx$$

となる．ここで

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dx = \log|f(t)| \qquad \text{＊積分定数は省略}$$

を利用すると

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{(1+y^2)'}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\log|1+y^2| = \frac{1}{2}\log(1+y^2),$$

$$\int \frac{1+2x^2}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx = \log|x| + x^2$$

であるから

$$\frac{1}{2}\log(1+y^2) = \log|x| + x^2 + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$$\log(1+y^2) = 2\log|x| + 2x^2 + 2C$$

$$\log(1+y^2) = \log(x^2) + 2x^2 + 2C$$

$$\log(1+y^2) - \log(x^2) = 2x^2 + 2C$$

$$\log\frac{1+y^2}{x^2} = 2x^2 + 2C$$

よって

$$\frac{1+y^2}{x^2} = e^{2x^2+2C}$$

$$\frac{1+y^2}{x^2} = e^{2C}e^{2x^2}$$

$$\frac{1+y^2}{x^2} = Ae^{2x^2} \qquad (A = e^{2C})$$

であるから，一般解は

$$1 + y^2 = Ax^2e^{2x^2} \cdots ③$$

と表される．

（解答終）

上の解法について，注意点を述べておく．③の y を x の関数の形で具体的に表すと④

$$y = \pm\sqrt{Ax^2e^{2x^2} - 1} \cdots ④$$

となる．しかし，通常では一般解というときに③のような表現を求めることができればよく，必ずしも④の形までは要求されない．

一方，③では C が任意定数であるから，$A = e^{2C}$ も任意定数である．詳しく述べると，C は負でもよいが，A はe^{2C} であるから常に正である．したがって，任意定数といっても C と A とではとる値の範囲が異なる．A のように値が正のみと制限されていたとしても，とにかく無限個の値が取れれば任意定数というのである．

また，任意定数の書き換え $A = e^{2C}$ を説明のために記述したが，特に書く必要はなく，A を改めて C と書いてよい．

例題 2

$$(x-1)\frac{dy}{dx} + (y-1) = 0$$

を解け．

（解答）

$x - 1 \neq 0,\ y - 1 \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{y-1}\,dy = -\frac{1}{x-1}\,dx$$

の両辺を形式的に積分すると

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx \cdots ⑤$$

対数の真数の絶対値を省略して

$$\log(y-1) = -\log(x-1) + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$$\log(y-1) + \log(x-1) = C$$

$$\log(y-1)(x-1) = C$$

となるから

$$(y-1)(x-1) = e^C \cdots ⑥$$

が得られる．このままでもよいが，$e^C = A$ とおけばこの解は

$$(y-1)(x-1) = A \cdots ⑦$$

と表される．

（解答終）

一般解⑥，⑦と特殊解との関係についていくつかの注意事項を述べておく．

$x \neq 1,\ y = 1$ のとき，元の方程式が満たされるから $y = 1$ は 1 つの解である．

$x = 1,\ y \neq 1$ のとき，元の方程式を

$$(x-1) + (y-1)\frac{dx}{dy} = 0$$

と書き直せば，$x = 1$ もまた解であると考えられる．

上述の解 $x = 1$ または $y = 1$ は⑦において $A = 0$ とおいた特殊解と考えることができる．

元の方程式で，y を x の関数とだけ考えれば，$x = 1$ は解とは言えないが，x を y の関数と考えた場合も解とする．つまり，x と y とは対等の資格をもつ変数と考え，その間の最も一般的な関係式が一般解である．

$x-1,\ y-1$ が負の場合も含めるため，不定積分の公式

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

にしたがって，絶対値記号を用いて式⑤から式⑦までの計算を行うと

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \left(-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\log|y-2| = -\log|x-1| + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$$\log|y-2| + \log|x-1| = C$$

$$\log|y-2||x-1| = C$$

となり

$$|y-2||x-1| = e^C$$

が得られ，$e^C = A$ とおけばこの解は

$$|y-2||x-1|=A$$

となるため

$$(y-1)(x-1)=\pm A\cdots⑧$$

が得られる．しかし，任意定数 A が正，0，負のいずれの値も取り得ると考えれば，式⑦と式⑧は同じものとなる．このように，微分方程式を解く過程で，対数の真数の絶対値記号は普通では省略して計算し，後で任意定数のとる範囲を考えてよい．

また，式⑥のままでは特殊解の$x=1$ や $y=1$ はその式の中には含まれないことになる．しかし，これらの解は式⑥で $C\to-\infty$ とした場合に得られる解であると考えることができる．このような解も特殊解として取り扱う．

参考文献

1) 立花俊一、成田清正 共著「エクササイズ 微分方程式」共立出版，1995
2) 田代嘉宏 著「微分方程式要論」森北出版，1982