

大学初年次における数学教材の提案（その 50） ～微分の概念～

貴田 研司^{*1}

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.50 ～The Concept of Differential～

by

Kenshi KIDA^{*1}

(received on Dec.3,2024 & accepted on Jan.30,2025)

あらまし

本論文においては、微分商とは異なる微分の概念について解析学的に解説し、さらに、微分の幾何学的な意味についても紹介することにする。

Abstract

In this paper, first we give analytic explanation of the concept of differential which is different from differential quotient. Further we present geometric image of differential.

キーワード：微分，微分係数，微分商

Keywords: Differential, Differential Coefficient, Differential Quotient

1. はじめに

大学初年次における微分積分の授業において、微分法としては、微分係数，導関数の概念と導関数の計算方法について講義と演習を行うが，微分係数と導関数の概念については次のことを学ぶ。

$x = a$ を含む开区間で定義された関数 $f(x)$ について極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，これを $f'(a)$ で表し $x = a$ おける $f(x)$ の微分係数といい， $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。

関数 $f(x)$ がある区間 I の各点でそれぞれ微分可能であるとき， $f(x)$ は区間 I で微分可能であるという。

このとき $x \rightarrow f'(x)$ という対応はこの区間 I を定義域とする関数と考えることができる。一般に，関数 $f(x)$ に対して $f'(x)$ を導関数という。すなわち

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を表す記号として

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), Dy, Df(x)$$

などが用いられ，関数 $f(x)$ に対してその導関数を求めることを $f(x)$ を x について微分するという。

^{*1} 理系教育センター 教授
STEM Education Center, Professor

しかしながら、 y の微分 dy と x の微分 dx の間の関係式 $dy = f'(x)dx$ について扱う時間を殆ど割くことが出来ないのが現状であるため、本論文では、この微分について、幾何学的な意味まで含めた解説を試みたい¹⁾²⁾³⁾。

2. 微分の概念

定理

関数 $y = f(x)$ が x で微分可能であるための必要十分条件は、独立変数が x から $x + \Delta x$ まで変動して、従属変数が y から $y + \Delta y$ まで変動するとき、 Δx に無関係な x の関数 α が存在して

$$\Delta y = \alpha \Delta x + o(\Delta x)$$

となる関係式が成り立つことである。ここに、 $f(x)$ が x で微分可能ならば、 $\alpha = f'(x)$ である。

【ランダウ記法】

$o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) は

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

となることを意味する。 $o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) を単に $o(\Delta x)$ と表すこともある。

(証明)

$f(x)$ が x で微分可能ならば、 $\Delta x = h$ とおくときであり $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ だから

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

となるから

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

とおくとき

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

である。すなわち

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \quad \varepsilon\Delta x = o(\Delta x)$$

と表される。

逆に $\Delta y = \alpha\Delta x + o(\Delta x)$ であれば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

だから

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$$

となるから、関数 $y = f(x)$ が x で微分可能であり、 $\alpha = f'(x)$ となる。

(証明終)

関数 $y = f(x)$ が x で微分可能であるとき, $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ において, Δx についての 1 次の項 $f'(x)\Delta x$ を x における y の微分といい, dy で表す. 特に $f(x) = x$ のとき, $f'(x) = 1$ で $dx = \Delta x$ であるから, y の微分 dy と x の微分 dx の間には

$$dy = f'(x)dx \cdots \textcircled{1}$$

という関係式が成り立つ. ①の式から

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

は微分の商という意味をもつとも考えられ, この意味で $f'(x)$ を微分商ともいう. 微分係数という用語は, ①の式で微分 dy における微分 dx の係数という意味である.

3. 微分の幾何学的意味

関数 $y = f(x)$ が 1 つの点 x の近傍で定義されているとして, そのグラフについて考える.

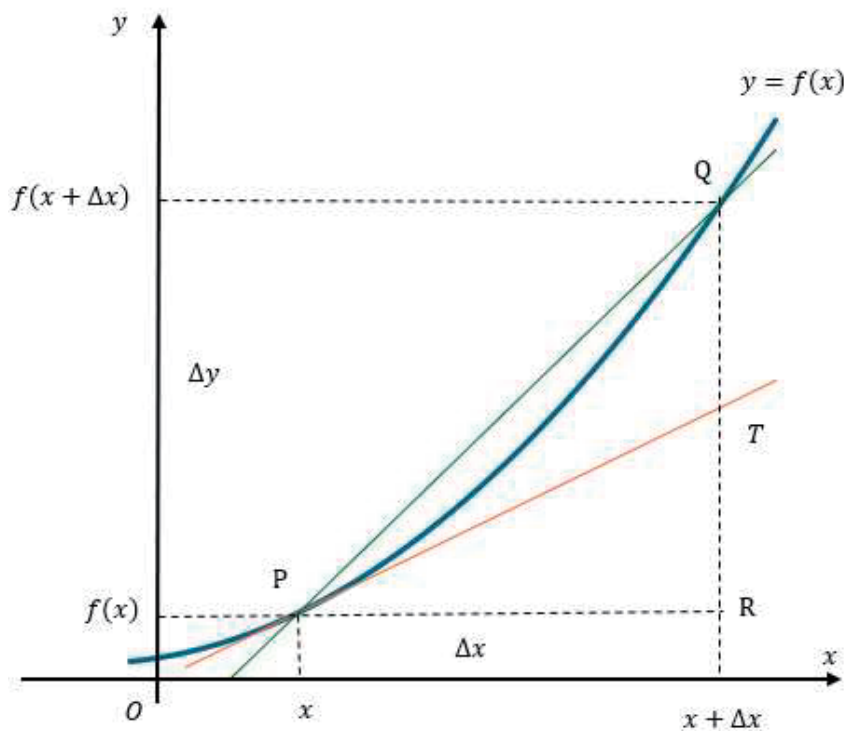


Fig. 1 Geometric Image of Differential

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{PQ}{PR} \cdots \textcircled{2}$$

は 2 点 P, Q を結ぶ直線の傾きである. $\Delta x \rightarrow 0$ のとき, ②が極限 $f'(x)$ をもつということは, 点 Q が点 P に近づくとき, 直線 PQ が傾き $f'(x)$ をもつ直線 PT に近づくことに他ならない. この直線 PT が点 P におけるグラフの接線である.

換言すると, 関数 $y = f(x)$ が点 x において微分可能であるということは, そのグラフが点 $P(x, f(x))$ において (x 軸に垂直でない) 接線をもつということであり, そのとき, $f'(x)$ はその傾きを表す.

さらに

$$\frac{RT}{PR} = f'(x), \quad PR = \Delta x, \quad QR = \Delta y$$

であるから

$$RT = f'(x)\Delta x$$

であり，定理における $o(\Delta x)$ の絶対値は QT によって表される．

なお，グラフが x 軸に垂直な接線をもつ場合がある．これは

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = +\infty \quad (\text{または } -\infty)$$

となる場合である．

参考文献

- 1) 矢野健太郎、石原繁 編「微分積分（改訂版）」裳華房，1991
- 2) 三村征雄「微分積分学I」岩波全書，1970
- 3) 水野克彦 編「基礎課程 解析学」学術図書，1966