東海大学紀要 情報通信学部
Vol.18, 2025, pp.1-6

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 51）
～ 無理関数の積分の計算方法 ～

貴田 研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.51
~ Calculation Method of Indefinite Integrals of Irrational Functions ~

by

Kenshi KIDA*1

(received on Nov.Dec. , 2024 & accepted on Jan. Feb.Mar. , 2025)

あらまし

本論文において，無理関数の積分の計算方法の一つについて解説する．ある型の無理関数の積分は，特定の変数変換をすることによって有理関数の積分に帰着して求めることができる．具体的な計算の例も付け加える．

Abstract

In this paper, we give explanation of a calculation method of indefinite integrals of irrational functions. A certain type of indefinite integrals of irrational functions reduced to that of rational functions by means of specific changes of variables. Also, we present several concreate examples.

キーワード：無理関数，変数変換，有理関数
Keywords: *Irrational Function, Change of Variables, Rational Function*

1. はじめに

大学初年次の微分積分において無理関数の不定積分について学ぶが，拙著「大学初年次における数学教材の提案（その 47）～ 無理関数の積分公式 ～」[1)] ではその中で重要と思われる公式として，次の 4 つを挙げた．

(i) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

(ii) $$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right) + C \quad (A \neq 0)$$

(iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

(iv) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

これに引き続き本論文では，不定積分

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

（ ただし，$R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ は，x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ （$a \neq 0,\ D = b^2-4ac \neq 0$）の有理関数を表す．）

について，特定の変数変換を用いた計算方法について述べる．

*1 理系教育センター　教授
STEM Education Center，Professor

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ の計算方法

不定積分

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

の計算方法の一つとして，次のことが知られている．[2)3)4)]

(I) $a > 0$ の場合

① $D > 0$ のとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha < \beta)$ とおく．

㋐ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x-\beta)\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$

であり

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}} = t$$

すなわち

$$x = \frac{\alpha - \beta t^2}{1-t^2}$$

と置換すれば，t の有理関数の積分に変換される．

㋑ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$

すなわち

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}$$

と置換すれば，t の有理関数の積分に変換される．

② $D < 0$ のとき

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$$

すなわち

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}$$

と置換すれば，t の有理関数の積分に変換される．

(II) $a < 0$ の場合

① $D > 0$ のとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha < x < \beta)$ とおく．

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\,(\beta - x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

であり

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t$$

すなわち

$$x = \frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2}$$

と置換すれば，t の有理関数の積分に変換される．

② $D < 0$ のとき $ax^2 + bx + c < 0$ となるから，この場合は除く．

3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ の計算例

第 2 章で述べた手法を用いた計算の例を挙げる．

例題 1 [5)6)]

$$I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$ を求めよ．

（解答）

第 2 章の (I) ②の場合である．

$\sqrt{1 + x^2} = t - x \cdots (3.1.1)$ とおく．

両辺を 2 乗して

$$1 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$2tx = t^2 - 1$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t} \cdots (3.1.2)$$

であるから

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2 + 1}{2\,t^2}$$

すなわち

$$dx = \frac{t^2 + 1}{2\,t^2}\, dt \cdots (3.1.3)$$

であり，(3.1.2) より

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + x^2} &= t - x \\ &= t - \frac{t^2 - 1}{2t} \\ &= \frac{2t^2}{2t} - \frac{t^2 - 1}{2t} \\ &= \frac{t^2 + 1}{2t} \cdots (3.1.4)\end{aligned}$$

となっている．したがって，(3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) より

$$I_1 = \int \frac{2t}{t^2 - 1} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + 1}{2\,t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 - 1}\ dt$$

$$= \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\ dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \log|t-1| - \log|t+1| + C$$

$$= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

(3.1.1) より $t = x + \sqrt{1+x^2}$ であるから

$$= \log\left|\frac{x + \sqrt{1+x^2} - 1}{x + \sqrt{1+x^2} + 1}\right| + C$$

が得られる.

（解答終）

例題２[7)8)]

$$I_2 = \int \frac{1}{(2+3x)\sqrt{4-x^2}}\ dx$$ を求めよ.

（解答）

第２章の(II)①の場合である.

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{(2-x)(2+x)} = (2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdots (3.2.1)$$

としておく.

$$t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdots (3.2.2)$$

とおいて，両辺を２乗すると

$$t^2 = \frac{2+x}{2-x}$$

$$(2-x)t^2 = 2 + x$$

$$(t^2+1)x = 2(t^2-1)$$

$$x = \frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \cdots (3.2.3)$$

となるから

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{2t \cdot (t^2+1) - (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{8t}{(t^2+1)^2}$$

すなわち

$$dx = \frac{8t}{(t^2+1)^2}\ dt \cdots (3.2.4)$$

また，(3.2.3) より

$$\begin{aligned} 2+3x &= 2+3\cdot\frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ &= \frac{2(t^2+1)}{t^2+1}+3\cdot\frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ &= \frac{8t^2-4}{t^2+1} \\ &= \frac{4(2t^2-1)}{t^2+1} \cdots (3.2.5) \end{aligned}$$

であり，さらに，(3.2.1)，(3.2.2)，(3.3.3) により

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2} &= (2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \\ &= \left\{2-\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}\right\}\cdot t \\ &= \left\{\frac{2(t^2+1)}{t^2+1}-\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}\right\}\cdot t \\ &= \frac{4t}{t^2+1} \cdots (3.2.6) \end{aligned}$$

となっている．したがって，(3.2.4)，(3.2.5)，(3.3.6) により

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{t^2+1}{4(2t^2-1)}\cdot\frac{t^2+1}{4t}\cdot\frac{8t}{(t^2+1)^2}\ dt \\ &= \int \frac{1}{2(2t^2-1)}\ dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2-\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\ dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}\,t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C \end{aligned}$$

(3.2.2)により

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + 1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{4+2x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{4+2x} + \sqrt{2-x}} \right| + C$$

が得られる.

（解答終）

参考文献

1)貴田研司著「大学初年次における数学教材の提案（その47）～ 無理関数の積分公式 ～」 東海大学紀要情報通信学部(Vol.17)，2025
2)福田安蔵、鈴木七緒、安岡善則、黒崎千代子 共編「詳解微積分演習I」共立出版，1960
3)三宅敏恒「入門微分積分」培風館,1992
4)杉浦光夫、清水英男、金子晃、岡本和夫 共著「解析演習」東京大学出版会，1989
5)三村征雄 編「大学演習 微分積分学」裳華房,1955
6)水本久夫著「微分積分学の基礎」培風館，1993
7)三村征雄「微分積分学I」岩波全書,1970
8)松尾吉知、川端逸典、宮原靖 共著「微分積分学」昭晃堂，1974