東海大学紀要 情報通信学部
Vol.18, 2025, pp.7-11

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 52）
～ ウォリスの公式 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.52
~ Wallis Formula ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov.Dec. , 2024 & accepted on Jan. Feb.Mar. , 2025)

あらまし

本論文では，ウォリスの積分と呼ばれる閉区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ における三角関数 $\sin^m x$ および $\cos^m x$ の定積分の公式を示し，さらに，このウォリスの積分を用いて円周率 π を表す等式の一つであるウォリスの公式を導く方法の解説を試みる．

Abstract

In this paper, we present a formula of definite integrals of trigonometric functions called Wallis Formula. In addition, we give explanation of Wallis Formula by means of Wallis integral.

キーワード：ウォリスの公式，ウォリスの積分，円周率
***Keywords:** Wallis Formula, Wallis Integral, Circle Ratio*

1. はじめに

大学初年次の微分積分において，$\sin^k x, \cos^k x$ の定積分について

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\, dx, \qquad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x\, dx \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

とおけば

$$I_k = J_k$$

であり，k が偶数であるか，奇数であるかにしたがって場合分けをすれば

$$\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

が成り立つことを学ぶ．この積分公式はウォリスの積分とも呼ばれる．[1)2)]

本論文では，このウォリスの積分を用いることにより，ウォリスの公式と呼ばれる円周率を表す等式

$$\sqrt{\boldsymbol{\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$$

を導く方法[2)3)4)]について解説する．

---

*1 理系教育センター　教授
STEM Education Center，Professor

2. ウォリス積分

定積分

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx, \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \, dx \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

について考える.

$$J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \, dx$$

は

$$t = \frac{\pi}{2} - x$$

とおくと

$$dx = -dt$$

であり

$$\begin{array}{c|l} x & 0 \ \to \ \frac{\pi}{2} \\ t & \frac{\pi}{2} \ \to \ 0 \end{array}$$

となるから

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^k t \, (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \, dt \end{aligned}$$

により

$$I_k = J_k$$

となることがわかる.

一方

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1} x \sin x \, dx \\ &= \left[\sin^{k-1} x \cdot (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k-1)\sin^{k-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k-1)\sin^{k-2} x \cdot \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k-1)\sin^{k-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \end{aligned}$$

$$= (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{k-2} x - \sin^k x\right)\, dx$$

$$= (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k$$

により

$$kI_k = (k-1)I_{k-2}$$

すなわち

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \cdots (2.1)$$

が成り立つ.

　また

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

であるから，k が偶数であるか，奇数であるかにしたがって場合分けをすれば

$$\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot I_0 \\ I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \dfrac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot I_1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \dfrac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} \end{cases} \cdots (2.2)$$

が得られる.

　これを**ウォリスの積分**という.

3. ウォリスの公式

　円周率を表す公式として，ウォリスの公式と呼ばれる等式を紹介する.

補助定理

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\, dx$$

とおけば

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 \cdots (3.1)$$

が成り立つ.

（証明）

閉区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において

$$0 \leqq \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x$$

であるから

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$$

すなわち

$$0 \leqq I_{2n+1} \leqq I_{2n} \leqq I_{2n-1}$$

だから

$$1 \leqq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \cdots (3.2)$$

となる．

また，(2.1) において $k = 2n+1$ とすれば

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

となり

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

であるから

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$$

であり，(3.2) により

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

が得られる．

（証明終）

定理（ウォリスの公式）

$$\sqrt{\boldsymbol{\pi}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}.$$

（証明）

(2.2) より

$$\begin{aligned} I_{2n} \cdot I_{2n+1} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\pi = 2(2n+1) \cdot I_{2n} \cdot I_{2n+1}$$

より

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2(2n+1)} \cdot \sqrt{I_{2n}} \cdot \sqrt{I_{2n+1}}$$
$$= \sqrt{2(2n+1)} \cdot I_{2n+1} \cdot \frac{\sqrt{I_{2n}}}{\sqrt{I_{2n+1}}} \cdots (3.3)$$

となることがわかる．

ところが

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$
$$= \frac{\{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2\}^2}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdots (3.4)$$

である．

したがって，(3.3)，(3.4) より

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2(2n+1)} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$
$$= \sqrt{2(2n+1)} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \cdot \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$

となることがわかる．

また

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2n+1}} = 1$$

と，補助定理(3.1) によって

$$\boldsymbol{\sqrt{\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$$

が得られる．

（証明終）

参考文献

1) 水本久夫著「微分積分学の基礎」培風館，1993
2) 三村征雄「微分積分学I」岩波全書, 1970
3) 福田安蔵、鈴木七緒、安岡善則、黒崎千代子 共編「詳解微積分演習I」共立出版，1960
4) 杉浦光夫 著「解析入門I」東京大学出版会，1980