

Proceedings of the School of Science of Tokai University



Vol. 61, Mar. 2026

東海大学紀要
理学部

東海大学紀要

理学部

Vol. 61, Mar. 2026

目次

Size of Spherical Micelles of 1-Decylpyridinium Iodide in Aqueous NaI Solutions	Katsuhiko FUJIO, Masaya WATANABE 1
Application of Flow Injection System to Ascorbic Acid Assay for Assessing Oxidative Potential of Metal Ions	Sutthisan KAEWKRAM, Hideaki SEKINE, Yoshika SEKINE 8
4次 del Pezzo 曲面上の空間曲線の trisecant line の本数について	山田明 16
1次元横磁場イジング模型におけるクリロフ複雑性の長時間ゆらぎ	深谷友也, 伊與田英輝 32

Proceedings of the School of Science of Tokai University

CONTENTS

Vol. 61, Mar. 2026

Size of Spherical Micelles of 1-Decylpyridinium Iodide in Aqueous NaI Solutions	Katsuhiko FUJIO, Masaya WATANABE 1
Application of Flow Injection System to Ascorbic Acid Assay for Assessing Oxidative Potential of Metal Ions	Sutthisan KAEWKRAM, Hideaki SEKINE, Yoshika SEKINE 8
On the Number of Trisecant Lines of Space Curves Lying on a Quartic Del Pezzo Surface	Akira YAMADA 16
Long-time Fluctuation of the Krylov Complexity in One-dimensional Transverse Field Ising Model	Tomoya FUKAYA, Eiki IYODA 32

Size of Spherical Micelles of 1-Decylpyridinium Iodide in Aqueous NaI Solutions

by

Katsuhiko FUJIO*¹ and Masaya WATANABE²

¹*Department of Chemistry, School of Science, Tokai University
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa, 259-1292, Japan*

²*Department of Chemistry, Faculty of Science, Shinshu University
Matsumoto, Nagano, 390-8621, Japan*

*Corresponding author: E-mail: kfujio@tokai.ac.jp

(Received on Oct. 10, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

The static light scattering was measured on aqueous NaI solutions of 1-decylpyridinium iodide (DePI) at 25°C and the dependence of its micelle molecular weight on NaI concentration was studied. As a result, it was shown that DePI micelle does not undergo any salt-induced shape transition and therefore remains normal spherical over the whole NaI concentration range from 0 to 0.080 mol dm⁻³, as opposed to 1-dodecylpyridinium iodide micelle reported to undergo the salt-induced sphere-rod transition at 0.007 mol dm⁻³ NaI. At 0.050–0.080 mol dm⁻³ NaI, however, the second virial coefficients were observed to be negative, and it was suggested that the interaction between spherical micelles of DePI would be attractive and therefore the molecular weight of DePI micelle would increase with increasing NaI concentration.

Keywords: alkylpyridinium halide surfactant; added salt effect on micelle size; salt-induced shape transition; normal spherical micelle

1 Introduction

Most ionic surfactants whose hydrophobic chain is longer than the decyl one can form rod-like micelles in aqueous salt solutions, when the simple salt with a common counterion is added to a concentration exceeding a certain threshold [1]. We have previously reported that 1-dodecylpyridinium chloride (DPC) [2] and bromide (DPB) [3] and 1-tetradecylpyridinium (TPC) and 1-hexadecylpyridinium chlorides (CPC) [4] form spherical micelles alone even in a saturated solution of the corresponding sodium halide at 25°C, whereas 1-dodecylpyridinium iodide (DPI) forms rodlike micelles above 0.007 mol dm⁻³ NaI at the same temperature [5]. DPC, TPC and CPC form the normal spherical micelles above 0.05×10^{-3} , 0.015×10^{-3} and 0.0034×10^{-3}

mol dm^{-3} NaCl, respectively, but only the loosely packed spherical micelles at the lower NaCl concentrations [2, 4]. Consequently, micelles of these alkylpyridinium chlorides undergo the salt-induced shape transition from the loosely packed spherical micelle to the normal spherical micelle at threshold NaCl concentrations mentioned above. DPB forms the normal spherical micelles below 0.30 mol dm^{-3} NaBr, but the special spherical micelles having a constant aggregation number of 70.7, called the constant size spherical micelle in this article, at NaBr concentrations from 0.30 to 6.00 mol dm^{-3} [3]. Such constant size spherical micelle was reported by Anacker [6] for CPC in aqueous NaCl solutions at 30°C .

In this study, we measured static light scattering on aqueous NaI solutions of 1-decylpyridinium iodide (DePI) at 25°C and studied the dependence of its micelle molecular weight on NaCl concentration in order to confirm whether DePI micelle undergoes some salt-induced shape transition and whether DePI form the loosely packed or the constant size spherical micelles.

2 Experimental

Materials. 1-Decylpyridinium iodide (DePI) was synthesized from 1-iododecane and pyridine. ACROS Organics 1-iododecane was used without any purification. Pyridine was purchased from Nacalai Tesque, Inc. and dried over molecular sieve 3A before use. A mixture of 1-iododecane (102.6 g, 0.38 mol) and dry pyridine (64.5 g, 0.79 mol) was refluxed at 120°C for 7 h. After the mixture was cooled in an ice-water bath, the precipitates obtained were recrystallized three times from acetone-diethyl ether (1 : 2 v/v) mixture. The desired surfactant (64.8 g, 49% yield) was obtained as a pale-yellow crystal.

As shown in Fig. 1, the surface tension of aqueous solutions of the DePI sample shows no minimum around its critical micelle concentrations (cmc), $2.23 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$. This cmc value of DePI is in good agreement with the literature value of $2.25 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ [7].

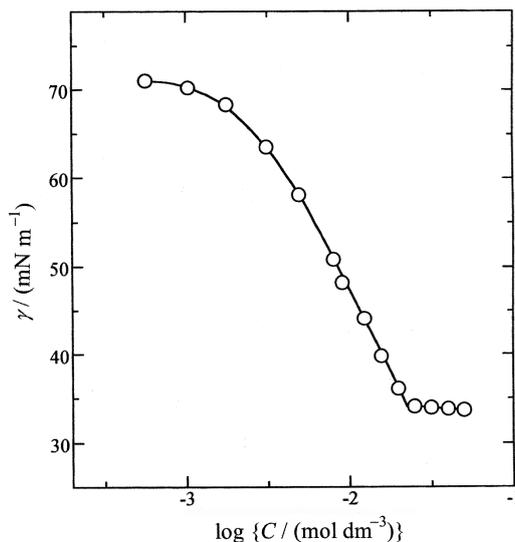


Fig. 1 Relationship between surface tension, γ , and logarithm of concentration, C , for aqueous solutions of DePI at 25°C . Surface tensions were measured by the drop weight method.

Apparatus. Light scattering was measured on a Laser Light Scattering Photometer DLS-700 manufactured by Otsuka Denshi Co., Inc., Japan. The incident light was vertically polarized light of 488 nm generated by a 7 mW argon ion laser, and both vertical and horizontal components of the scattered light were collected. The photometer was calibrated with purified benzene, as previously described [3]. The temperature was regulated to $25 \pm 0.2^\circ\text{C}$, by circulating constant temperature water from a Julabo F10-VC Thermostat. Solutions and solvents for light scattering measurements were filtered 4 or 5 times through a Millipore filter with a 0.10 or 0.22 μm pore size.

The specific refractive index increment was also measured at 488 nm and $25 \pm 0.1^\circ\text{C}$ on a Differential Refractometer RM-102 with a 50 W iodine lamp, manufactured by Otsuka Denshi Co., Inc. Its calibration method was also described previously [3].

The refractive index of aqueous NaI solutions at 488 nm and 25°C was evaluated from the concentration dependence of the difference of refractive index between NaI solution and water, measured by the above differential refractometer. We calculated the refractive index of water at 488 nm and 25°C from tabulated values at other wavelengths [8].

3 Results and Discussion

Excess reduced scattering intensities, $R_{90} - R_{90}^0$, of aqueous NaI solutions of DePI are shown in Fig. 2 as a function of surfactant concentration, c (g cm^{-3}) at various NaI concentrations, C_S (mol dm^{-3}). They are almost zero below the critical micelle concentration, c_0 (g cm^{-3}), but increase with increasing surfactant concentration above c_0 .

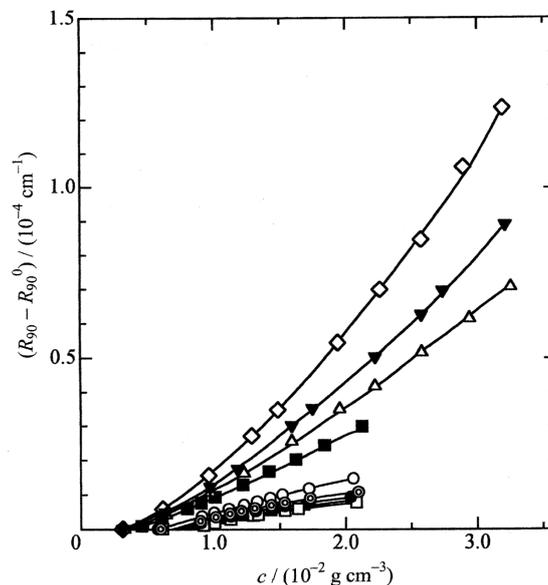


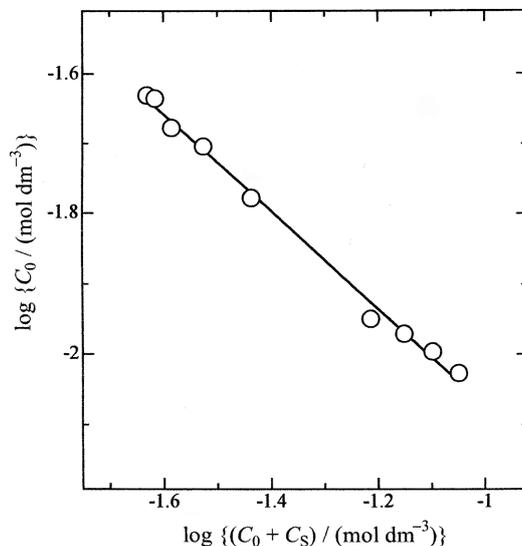
Fig. 2 Excess reduced intensity of scattered light from aqueous NaI solutions of DePI. C_S / (mol dm^{-3}): \circ , 0; \blacktriangle , 0.001; \square , 0.005; \bullet , 0.010; \odot , 0.020; \blacksquare , 0.050; \triangle , 0.060; \blacktriangledown , 0.070; \diamond , 0.080.

The critical micelle concentration, C_0 (mol dm^{-3}), of DePI decreases with increasing NaI concentrations, as given in Tables 1. It follows the Corrin-Harkins equations:

$$\log \{C_0 / (\text{mol dm}^{-3})\} = -0.693 \log \{(C_0 + C_S) / (\text{mol dm}^{-3})\} - 2.77 \quad (1)$$

Table 1 Critical micelle concentration, specific refractive index increment, and optical constant of aqueous NaI solution of DePI and refractive index of solvent.

$C_S/$ (mol dm ⁻³)	\tilde{n}_0	$c_0/$ (10 ⁻³ g cm ⁻³)	$C_0/$ (10 ⁻² mol dm ⁻³)	$(\partial\tilde{n}/\partial c)_{C_S}$ /(cm ³ g ⁻¹)	$K/$ (10 ⁻⁷ mol cm ² g ⁻²)
0	1.3367	8.12	2.34	0.1681	5.836
0.001	1.3367	8.04	2.32	0.1679	5.822
0.005	1.3368	7.30	2.10	0.1680	5.830
0.010	1.3369	6.86	1.98	0.1676	5.803
0.020	1.3371	5.78	1.66	0.1678	5.819
0.050	1.3378	3.90	1.12	0.1676	5.797
0.060	1.3380	3.71	1.07	0.1674	5.799
0.070	1.3383	3.50	1.01	0.1674	5.803
0.080	1.3385	3.26	0.94	0.1671	5.783

**Fig. 3** The Corrin-Harkins plot for DePI micelle in aqueous NaI solutions.

for DePI, as shown in Fig. 3. The slope of Corrin-Harkins plot, -0.693 , agrees well with the literature value for DPI, -0.703 [5]. On the other hand, the intercept, -2.77 , is larger than the one for DPI, -3.837 [5], as reflects the less hydrophobicity of DePI than DPI.

Fig. 4 shows Debye plots for micellar solutions of DePI. They give straight lines with positive slopes at 0.001 – 0.020 mol dm⁻³ NaI. At 0 mol dm⁻³ NaI, the reduced intensity increases with increasing surfactant concentration, but the rate of its increase gradually decreases. Such behavior was observed on light scattering from aqueous solutions of some other ionic surfactants [3–5, 9]. It has been attributed to changes in the degree of counterion binding [9, 10]. At the higher NaI concentrations, 0.050 – 0.080 mol dm⁻³, the reduced intensity decreases with increasing surfactant concentration, as observed for DPI which undergoes the salt-induced sphere-rod transition [5]. However, it continues to decrease and does not have a minimum observed for DPI [5]. Therefore, at the NaI concentrations observed, DePI micelles remains spherical and does not undergo the sphere-rod transition.

The linear relationship between reduced intensity and surfactant concentration follows the equa-

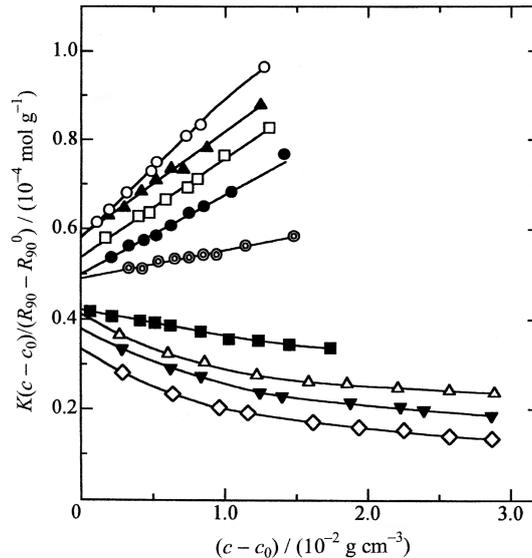


Fig. 4 Debye plots for aqueous NaI solutions of DePC. C_S / (mol dm^{-3}): \circ , 0; \blacktriangle , 0.001; \square , 0.005; \bullet , 0.010; \odot , 0.020; \blacksquare , 0.050; \triangle , 0.060; \blacktriangledown , 0.070; \diamond , 0.080.

tion

$$\frac{K(c - c_0)}{R_{90} - R_{90}^0} = \frac{1}{M} + 2B(c - c_0) \quad (2)$$

where M is the micelle molecular weight and B is the second virial coefficient. The optical constant, K , for the vertically polarized incident light is given by

$$K = \frac{4\pi^2 \tilde{n}_0^2 (\partial \tilde{n} / \partial c)_{C_S}^2}{N_A \lambda^4} \quad (3)$$

where N_A is Avogadro constant, λ the wavelength of the incident light, \tilde{n}_0 the refractive index of the solvent, and $(\partial \tilde{n} / \partial c)_{C_S}$ the specific refractive index increment of solution. At the NaI concentrations of 0 and 0.050–0.080 mol dm^{-3} , although the Debye plot is not linear, its adequate extrapolation to the infinite dilution of micelle is possible. It has been assumed that Eq. (2) would hold in the limit of zero micelle concentration.

Table 2 gives values of micelle molecular weight and second virial coefficient, together with those of micelle aggregation number, m , which calculated by dividing M by surfactant molecular weight, for DePI. The micelle molecular weight and aggregation number also indicate that DePI micelles are spherical at all NaI concentrations investigated.

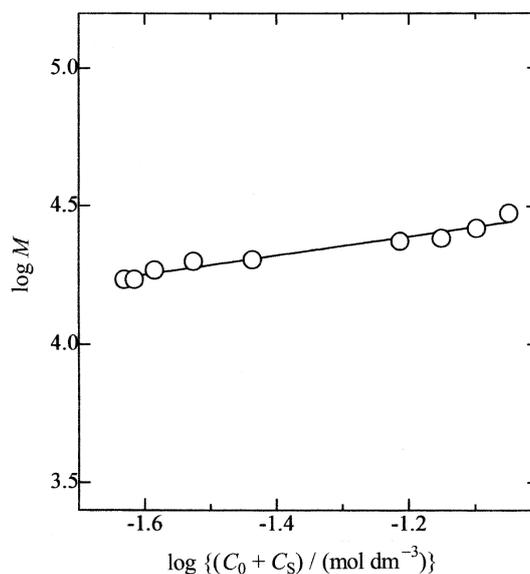
The salt-induced shape transition of ionic micelles is most clearly revealed by plotting the logarithm of micelle molecular weight against the logarithm of ionic strength or counterion concentration [1]. The ionic strength is given by concentrations of the surfactant monomer and the added salt, $C_0 + C_S$, because the monomer concentration remains almost constant above cmc. Fig. 5 shows such double logarithmic plot for DePI micelles in aqueous NaI solutions. The plot gives a straight line, expressed by

$$\begin{aligned} \log M &= 0.343 \log \{(C_0 + C_S) / (\text{mol dm}^{-3})\} + 4.81 \\ 0 &\leq C_S / (\text{mol dm}^{-3}) \leq 0.080. \end{aligned} \quad (4)$$

The coefficient of $\log(C_0 + C_S)$ was reported to be 0.305 for normal spherical DPI micelle and

Table 2 Molecular weight, aggregation number, and second virial coefficient of DePI micelles in aqueous NaI solution.

$C_S / (\text{mol dm}^{-3})$	$M/10^4$	m	$B/(10^{-3} \text{ mol cm}^3 \text{ g}^{-1})$
0	1.72	49.5	1.57
0.001	1.72	49.5	1.18
0.005	1.86	53.6	1.10
0.010	2.00	57.6	0.88
0.020	2.03	58.5	0.31
0.050	2.37	68.2	-0.29
0.060	2.43	70.0	-0.88
0.070	2.64	76.0	-1.68
0.080	2.99	86.1	-1.97

**Fig. 5** The double logarithmic plot of molecular weight against ionic strength for DePI micelle in aqueous NaI solutions.

1.885 for rodlike DPI micelle [5]. Judging by the aggregation number and the increasing rate of micelle molecular weight with increasing ionic strength, that is coefficient of $\log (C_0 + C_S)$ in Eq. (4), the straight line would correspond to the normal spherical micelle. However, the negative second virial coefficients observed at the higher NaI concentrations suggest that the attractive interaction would work between spherical DePI micelles and the molecular weight of DePI micelle would increase with increasing DePI concentration and therefore does not eliminate the possibility that DePI could form rodlike micelles. At least, in the concentration ranges investigated of NaI and DePI, we conclude that DePI forms only the normal spherical micelles.

We thank Dr. Toyoko Imae for the use of a light scattering apparatus.

References

- [1] S. Ikeda, *Colloid Polym. Sci.*, **269**, 49 (1991).
- [2] K. Fujio and S. Ikeda, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, **65**, 1406 (1992).
- [3] K. Fujio and S. Ikeda, *Langmuir*, **7**, 2899 (1991).

- [4] K. Fujio and Y. Tsuge, *Proc. Sch. Sci. TOKAI UNIV.*, **60**, 7, (2025).
- [5] S. Ikeda and K. Fujio, *Colloid polym. Sci.*, **270**, 1009 (1992).
- [6] E. W. Anacker. *J. Phys. Chem.*, **62**, 41 (1958).
- [7] W. D. Harkins, H. Krizek and M. L. Corrin, *J. Colloid Sci.*, **6**, 576 (1951).
- [8] Landolt-Börnstein, “*Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik*”, 6 Aufl., II Band, 8 Teil, Springer (1962).
- [9] P. Ekwall, L. Mandell and P. Solyom, *J. Colloid Interface Sci.*, **35**, 519 (1971).
- [10] D. C. Robin and I. L. Thomas, *J. Colloid Interface Sci.*, **26**, 415 (1968).

Application of Flow Injection System to Ascorbic Acid Assay for Assessing Oxidative Potential of Metal Ions

by

Sutthisan KAEWKRAM^{*1}, Hideaki SEKINE¹ and Yoshika SEKINE²

¹*Graduate School of Science and Technology, Tokai University
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan*

²*Department of Chemistry, School of Science, Tokai University
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan*

*Corresponding author: E-mail: 5ctad004@tokai.ac.jp, yoshika@tokai.ac.jp

(Received on Oct. 9, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

Human exposure to fine particulate matter (PM_{2.5}) air pollution is known to cause adverse health outcomes. The mechanisms by which PM_{2.5} affects human health are not yet fully understood. However, accumulating evidence indicates that PM exposure induces oxidative stress via the generation of reactive oxygen species (ROS), a process often characterized by its oxidative potential (OP). Therefore, reliable tools are needed to estimate the oxidant-generating capacity of PM. One of the most widely reported methods for assessing PM oxidative potential is the ascorbic acid (AA) assay. This assay employs chemical analysis to determine the time-course of the aqueous AA concentration during its reaction with chemical species present in PM_{2.5}. The depletion rate of AA in solution is referred to as the OP of the test sample. The AA concentration is quantified by conventional spectrophotometry at a wavelength of 265 nm. However, determining the AA depletion rate requires multiple measurements on a single sample, making it a labor-intensive method when analyzing large numbers of samples. The purpose of this study is to develop a more simplified and user-friendly AA assay by applying a flow injection (FI) system to measure the oxidation rate of AA. The FI system was constructed based on an ultrafast liquid chromatography setup without a chromatographic column. Dilution series of Cu(II) and Fe(II) were prepared, and their OP values were investigated by absorptiometry at 265 nm using the constructed FI system. As a result, the AA depletion rate increased with rising concentrations of both metal ions in solution. The OP values were compared with those obtained via traditional spectrophotometry. The results indicated no statistically significant differences between OP values measured by the two methods, demonstrating the successful application of the FI system for OP measurement.

Keywords: PM_{2.5}, Oxidative potential, Ascorbic acid assay, Flow-injection system

1 INTRODUCTION

Many literatures indicate the association between airborne fine particulate matter ($PM_{2.5}$) and adverse human health effects [1–3]. Although the mechanisms underlying PM-related health effects are not completely understood, growing evidence from biochemical assessments — such as DNA methylation studies, animal models, and human biomarker analyses — indicates that exposure to PM can induce oxidative stress in the body [4]. This offers a potential mechanism for PM toxicity. In addition, identifying the specific particle properties responsible for these health effects, such as their physical and physicochemical characteristics as well as their chemical composition, remains a challenge [5]. One of the leading hypotheses for how particles cause harm is that they induce oxidative stress and inflammation, which can subsequently lead to disease — a process often described by the term oxidative potential (OP).

Over the past few years, the OP produced by $PM_{2.5}$ has attracted much attention, various research suggested that many adverse health endpoints are due to the OP produced by $PM_{2.5}$, resulting in the generation of reactive oxygen species (ROS), and the excessive ROS cannot be completely counteracted by the antioxidants in the body, leading to the beginning of inflammatory responses. ROS are molecules or ions that may be present on $PM_{2.5}$, originate from external sources, or be produced intracellularly as by-products of oxygen-related chemical processes. They are superoxide radical ($O_2 \bullet$), hydrogen per oxide (H_2O_2), hydroxyl radical ($\bullet OH$), alkoxy radical ($RO \bullet$), carbon-centered radical ($C \bullet$) and singlet oxygen (O_2). An increase in intracellular ROS disrupts the existing balance between ROS and available antioxidants, which in turn leads to oxidative stress and various adverse health effects [6]. Consequently, OP has been widely recognized in multiple studies as a more suitable indicator than mass concentration alone for assessing the oxidative capacity of PM. Moreover, OP is considered one of the key mechanisms through which PM toxicity exerts its effects on human health.

In vitro assessment of aerosol particle toxicity based on the determination of OP was first carried out from the early 2000s. Since then, a variety of methodologies have been optimized and applied to determine the OP of PM, generally including ascorbic acid (AA) assay (OP^{AA}) [7, 8], dithiothreitol (DTT) assay (OP^{DTT}) [9], glutathione (GSH) assay (OP^{GSH}) [10] and TPT assay (OP^{TPT}) [11]. Compared with the methods mentioned, the AA assay appears to be the most sensitive to transition metals [7, 8]. The AA assay is employed to monitor the oxidation rate of AA by measuring the remaining AA in the presence of metal species over a specific time interval. A conventional spectrophotometer and quartz cuvette have been used to measure the concentration of AA in solution. However, determining the depletion rate of AA requires multiple measurements on a single sample, making it a labor-intensive method when analyzing large numbers of samples.

This study aimed to develop a simplified and user-friendly AA assay by applying a flow injection (FI) system to measure the oxidation rate of AA for quantifying oxidative potential (OP). The OP values induced by metal species, including Cu(II) and Fe(II), were determined using the FI system and compared with those obtained via conventional spectrophotometry as a reference technique.

2 MATERIALS AND METHODS

2.1 Instruments and Apparatus

The flow injection (FI) system was adapted from an Ultrafast Liquid Chromatograph (UFLC), originally designed for rapid and high-resolution high-performance liquid chromatography (HPLC). The system was operated without a chromatographic column and was used to monitor absorbance at a wavelength of 265 nm using a UV/VIS detector connected to a data processor. The UFLC system consisted of an LC-20AD pump (Shimadzu, Kyoto, Japan), an SPD-20A UV/VIS detector (Shimadzu, Kyoto, Japan), an injection valve, and a Chromatopac C-R8A data processor (Shimadzu, Kyoto, Japan), as shown in Figure 1. Phosphate buffer solution at pH 7.4 was used as a carrier at a flow rate of 1.0 mL/min.

A spectrophotometer (AS ONE, model ASUV-3100PG) with a standard cuvette (Quartz, 10-mm optical pathlength) was employed to compare with the OP obtained from the FI system. Absorbance at 265 nm was measured using ultrapure water as reference.

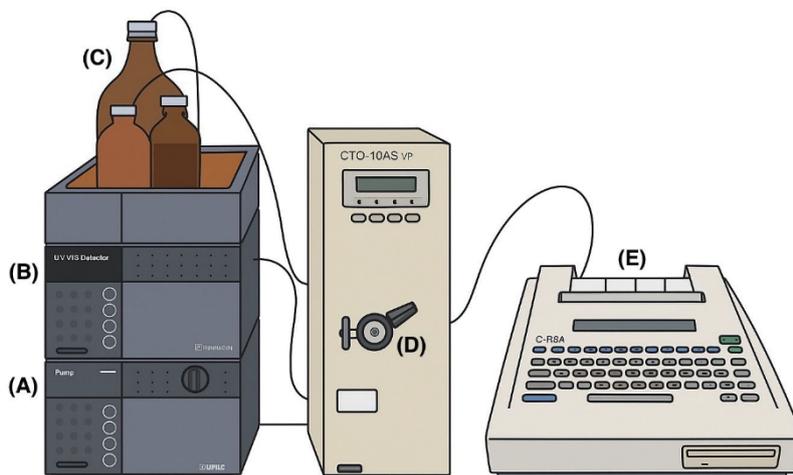


Fig. 1 Components of flow injection system for AA assay adapted from Shimadzu UFLC
 (A) LC-20AD pump (B) SPD-20A UV/VIS detector (C) Solvent container
 (D) Injection port (E) Chromatopac C-R8A data processor

2.2 Reagents

Copper (II) sulfate pentahydrate (FUJIFILM Wako Pure Chemical, Osaka, Japan, special grade) and iron (II) chloride tetrahydrate (Kanto Chemical, Tokyo, Japan, first grade) were dissolved and diluted with ultrapure water (Milli-Q ultrapure type1 water, 18.2 M Ω , Simplicity $^{\circ}$ water purification system, Merck KGaA, Darmstadt, Germany) to prepare stock aqueous solutions of 0.010 mM CuSO₄ and 1.0 mM FeCl₂ aqueous solutions, respectively. Since the ability of AA depletion differed between Cu(II) and Fe(II) [12], 0.010 mM CuSO₄ and 1.0 mM FeCl₂ solutions were used for the AA assay. L-ascorbic acid (FUJIFILM Wako Pure Chemical, Osaka, Japan; special grade) was dissolved in the ultrapure water to prepare the 10 mM solution used for the AA assay. Phosphate buffer system at pH 7.4 was prepared by mixing 0.10 M KH₂PO₄ (Kanto Chemical, Tokyo, Japan,

Application of Flow Injection System to Ascorbic Acid Assay for Assessing Oxidative Potential of Metal Ions special grade) and 0.10 M K_2HPO_4 (Kanto Chemical, Tokyo, Japan, special grade) solutions in a volume ratio of 1 : 4.

2.3 Measurement of AA depletion rate and OP

To investigate the Cu(II) and Fe(II) concentrations relating to the AA depletion rate, aqueous solutions of $CuSO_4$ (0, 0.10, 0.20, 0.30, and 0.50 μM) and $FeCl_2$ (0, 10, 20, and 100 μM) were prepared in ultrapure water, and these test samples were stored at 37°C in a thermostatic chamber before use. Subsequently, 0.1 ml of 10 mM ascorbic acid was added to 10 mL of test samples and mixed immediately to give test solutions. Twenty μL of the test solution was injected to the FI system, and absorbance at a wavelength of 265 nm were recorded at the start and at 1-minute intervals for 10 minutes. Note that each measurement required approximately 3.5 mL of sample solution by conventional spectrophotometry, whereas only 1 mL was sufficient for injection into the FI system.

Following the method reported by Souza *et al.* [13], the depletion rate of AA represents the consumption of ascorbic acid over a specific time range. It is determined by applying linear regression to the absorbance data (which are proportional to the loss of AA concentration) as a function of time. Using the slope and intercept derived from the linear relationship between absorbance (or instrumental response) and elapsed time, the AA depletion rate was calculated as equation (1)

$$AA \text{ depletion rate } (\mu M/min) = -\frac{[reductant]_0}{p} \frac{dA_t}{dt} \quad (1)$$

where, p refers to the intercept of absorbance versus time, $[reductant]_0$ to the initial concentration of AA (= 99 μM), and $\frac{dA_t}{dt}$ to the slope. When using the Chromatopac C-R8A data processor, absorbance was recorded as the peak height of the voltage signal derived from the SPD-20A UV/VIS detector. Therefore, the AA depletion rate can be calculated using either the peak heights or the peak heights normalized to the initial value ($t = 0$), instead of absorbance.

Since the measured AA depletion rate tends to fluctuate depending on the experimental conditions of each day likely due to the spontaneous degradation of AA in solutions without metal ions, the blank measurements (i.e., 0 M Cu(II) or Fe(II)) were conducted under the same conditions. To assess the oxidative ability of the studied metal ions, the AA depletion rate of the blank was subtracted from that of the sample to obtain the OP, as shown in equation (2).

$$OP = AA \text{ depletion rate of sample} - AA \text{ depletion rate of blank} \quad (2)$$

2.4 Comparison of FI system with conventional spectrophotometric analysis

To demonstrate the validity of applying the FI system for assessing the OP of metal ions, the OP values obtained from the FI system were compared with those measured using the spectrophotometer at 1-minute intervals for 10 minutes. Statistical analyses, including the calculation of mean, standard deviation, and t-test, were performed for each method and between the two methods using Microsoft® Excel. Test samples were prepared for OP measurements by both techniques, including 0.1 μM Cu(II), 10 μM Fe(II) and a mixed solution of 0.1 μM Cu(II) and 10 μM Fe(II).

3 RESULTS AND DISCUSSION

3.1 Rate of AA depletion by metal ions measured by FI system

Figure 2 presents the time-course profiles of normalized peak heights for test solutions containing 0–0.5 μM Cu(II) and 0–100 μM Fe(II), as measured by the developed FI-AA assay. Each plot represents the arithmetic mean of three replicate measurements. In most cases, the normalized peak heights exhibited an approximately linear decrease over time, with the slope rising in terms of its absolute value in proportion to the metal ion concentration. However, for all test samples, the dependence deviation from linearity were observed with noticeable at higher concentrations than the lower ones. It was according to research reported by Sugimoto et al. [14]. This suggests that the reaction between ascorbic acid and metal ions may follow first-order kinetics in essential. Accordingly, when evaluating the oxidative potential (OP) of individual species such as Cu(II) or Fe(II), it would be appropriate to use the rate constant derived from a first-order reaction model. On the other hand, the AA assay was originally developed as a method for assessing the toxicity of complex mixtures such as $\text{PM}_{2.5}$. For the purpose of comparing OP across different samples, the current method — approximating the change in absorbance over a 10-minute reaction period with a linear fit — is considered suitable. Therefore, the AA depletion rates were calculated from the slope and intercept of the linear regression for each run based on Eq. (1).

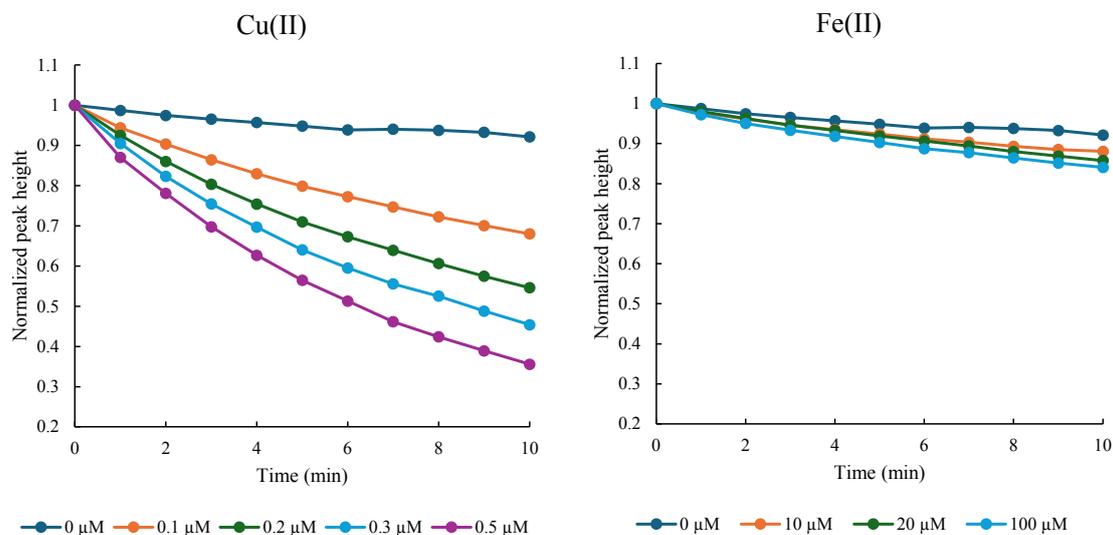


Fig. 2 Time-course of normalized peak heights of Cu(II) and Fe(II) solutions measured by the developed FI-AA assay. Each plot represents the arithmetic mean of three repeated runs ($n = 3$)

The results are shown in Figures 3 and 4. The X-axis shows the concentration of metal ions in the test sample and the Y-axis shows the AA depletion rate. Each test was conducted 3 times of measurement, and the error bars indicate the standard deviation. The AA depletion rate increased with increasing concentrations of both metal ions in the solutions. From the figures, it should be noted that at a 1/100 concentration ratio of Cu(II) to Fe(II), Cu(II) exhibited the AA depletion rate approximately three times higher than that of Fe(II). This trend is consistent with the study on effect of Werner-Type complex formation of Cu(II) and Fe(II) on OPs assessed using AA Assay

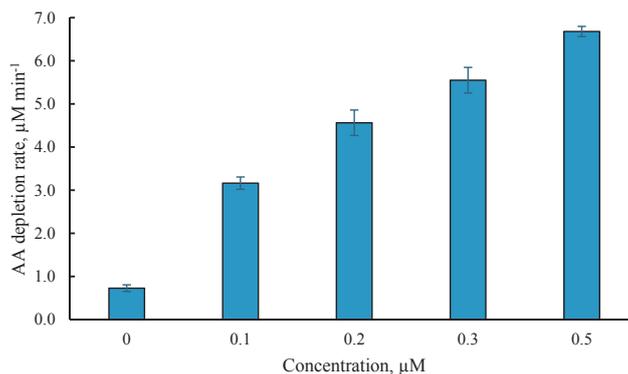


Fig. 3 Relationship between Cu(II) concentration and the rate of AA depletion measured by developed FI system. Error bars indicate the standard deviation of three repeated runs ($n = 3$)

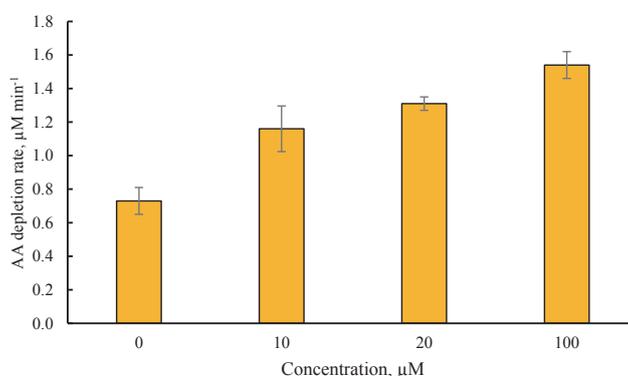


Fig. 4 Relationship between Fe(II) concentration and the rate of AA depletion measured by developed FI system. Error bars indicate the standard deviation of three repeated runs ($n = 3$)

reported by Sekine *et al.* [12] which OP measurements were carried out by spectrophotometer.

3.2 Comparative results of both techniques and statistical analysis

To avoid potential influences on the AA depletion rates of the blank measurements, the OP values were calculated based on Eq. (2) and compared between this FI system and conventional spectrophotometry, as shown in Table 1. As for 0.1 μM Cu(II), the OP measured by the FI system was 1.7 $\mu\text{M min}^{-1}$, which was equivalent to the value obtained by spectrophotometry (1.6 $\mu\text{M min}^{-1}$). As for 10 μM Fe(II), the OP values were 0.34 $\mu\text{M min}^{-1}$ (FI) and 0.31 $\mu\text{M min}^{-1}$ (spectrophotometry). In the mixed solution of 0.1 μM Cu(II) and 10 μM Fe(II), the OP increased to 2.5 $\mu\text{M min}^{-1}$ by FI and 2.3 $\mu\text{M min}^{-1}$ by spectrophotometry. The OP values obtained from both techniques show good agreement for all samples, with p -values from the t-test exceeding 0.05, indicating no significant difference between the two approaches.

Overall, the results demonstrate that the FI system provides OP values comparable to those obtained by the conventional spectrophotometric technique, assuring the reliability and validity of the FI system for OP assessment.

Table 1 Comparison of OP values obtained by the two techniques over five repeated runs.

Test solution	OP in $\mu\text{M min}^{-1}$ measured by FI system	OP in $\mu\text{M min}^{-1}$ measured by Spectrophotometry	p -value from t-test
0.1 μM Cu(II)	1.7 \pm 0.065	1.6 \pm 0.149	0.13
10 μM Fe(II)	0.34 \pm 0.06	0.31 \pm 0.13	0.66
Mixed	2.5 \pm 0.14	2.3 \pm 0.10	0.14

4 CONCLUSION

The flow injection (FI) system was successfully applied to assess the oxidative potential (OP) driven by metal ions based on the rate of ascorbic acid (AA) depletion, showing results consistent with the OP values obtained by the conventional spectrophotometric technique. The AA depletion rate increased with increasing metal ion concentrations, and Cu(II) exhibited approximately three times more OP than Fe(II) at a 1/100 Cu-to-Fe concentration ratio. Statistical analyses indicated no significant difference ($p > 0.05$) between OP values measured by the two techniques. These findings show that the FI system possibly provides reliable, accurate, and efficient determination of OP with reduced sample volume, and the simplified and user-friendly AA assay was realized.

References

- [1] R. D. Brook, S. Rajagopalan, C. A. Pope III, J. R. Brook, A. Bhatnagar, A. V. Diez-Roux, F. Holguin, Y. Hong, R. V. Luepker, M. A. Mittleman, A. Peters, D. Siscovick, S. C. Smith Jr, L. Whitsel, J. D. Kaufman, *Particulate matter air pollution and cardiovascular disease, an update to the scientific statement from the American Heart Association*, *Circulation*, 121(21), (2010), 2331–78. <https://doi.org/10.1161/CIR.0b013e3181d8e3e1>
- [2] D. W. Dockery, D. C. A. Pope III, X. Xu, J. D. Spengler, J. H. Ware, M. E. Fay, B. G. Ferris, F. E. Speizer, *An association between air pollution and mortality in six US cities*, *N. Engl. J. Med.*, 329 (1993), 1753–1759. <https://doi.org/10.1056/NEJM199312093292401>
- [3] J. Lelieveld, A. Pozzer, U. Pöschl, M. Fnais, A. Haines, T. Münzel, *Loss of life expectancy from air pollution compared to other risk factors: a worldwide perspective*, *Cardiovasc. Res.*, 116(11) (2020), 1910–1917. <https://doi.org/10.1093/cvr/cvaa025>
- [4] J.T. Bates, T. Fang, V. Verma, L. Zeng, R.J. Weber, P.E. Tolbert, J.Y. Abrams, S.E. Sarnat, M. Klein, J. A. Mulholland, A.G. Russell, *Review of acellular assays of ambient particulate matter oxidative potential: Methods and relationships with composition, sources, and health effects*, *Environ. Sci. Technol.*, 53 (8) (2019), 4003–4019. <https://doi.org/10.1021/acs.est.8b03430>
- [5] F. J. Kelly, J. C. Fussell, *Size, source and chemical composition as determinants of toxicity attributable to ambient particulate matter*. *Atmos. Environ.*, 60(2012), 504–526. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2012.06.039>
- [6] F. Hedayat, S. Stevanovic, B. Miljevic, S. Bottle, Z.D. Ristovski, *Evaluating the molecular assays for measuring the oxidative potential of particulate matter*, *Chem. Ind. Chem. Eng. Q.*, 21(2015), 201–210. <https://doi.org/10.2298/CICEQ140228031H>
- [7] A. Expósito, J. Maillo, I. Uriarte, M. Santibáñez, I. Fernández-Olmo, *Kinetics of ascorbate and dithiothreitol oxidation by soluble copper, iron, and manganese, and 1,4-naphthoquinone: Influence of the species concentration and the type of fluid*, *Chemosphere*, 361(2024),142435. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2024.142435>

- [8] E.J.S. Souza, K.W. Fomba, M. van Pinxteren, N. Deabji, H. Herrmann, *Strong synergistic and antagonistic effects of quinones and metal ions in oxidative potential (OP) determination by ascorbic acid (AA) assays*, J. Hazard. Mater., 478(2024), 135599. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2024.135599>
- [9] A. K. Cho, C. Sioutas, A. H. Miguel, Y. Kumagai, D. A. Schmitz, M. Singh, A. Eiguren-Fernandez, J. R. Froines, *Redox activity of airborne particulate matter at different sites in the Los Angeles Basin*, Environ. Res., 99 (2005), 40–47. <https://doi.org/10.1016/j.envres.2005.01.003>
- [10] F. Nuhu, A. Gordon, R. Sturme, A.-M. Seymour, S. Bhandari, *Measurement of glutathione as a tool for oxidative stress studies by high performance liquid chromatography*. Molecules, 25 (2020) 4196. <https://doi.org/10.3390/molecules25184196>
- [11] K. Sohara, K. Yamauchi, Y. Sekine, *Evaluation of $\cdot OH$ production potential of particulate matter ($PM_{2.5}$) collected on TiO_2 -supporting quartz filters*, Catalysts, 12(2022), 1016. <https://doi.org/10.3390/catal12091016>
- [12] H. Sekine, H. Ito, Y. Sekine, *Effect of Werner-Type complex formation of Cu^{2+} and Fe^{2+} on oxidative potentials assessed using ascorbic acid assay*. Atmosphere,16(2025)192. <https://doi.org/10.3390/atmos16020192>
- [13] E. J. S. Souza, G. Uzu, K. W. Fomba, P. A. Dominutti, T. Mhadhbi, J.-L. Jaffrezo, H. Herrmann, *A comparative study of methods for calculating the oxidative potential (OP) of atmospheric particulate matter*. Environ. Sci.: Atmos., 5 (2025) 889. <https://doi.org/10.1039/D5EA00025D>
- [14] K. Sugimoto, T. Okuda, S. Hasegawa, C. Nishita, K. Hara, M. Hayashi, *Examination of the oxidation mechanism of ascorbic acid when measuring oxidative potential using the ascorbic acid assay*. J. Jpn. Soc. Atmos. Environ., 56(2021) 56, 96–107. <https://doi.org/10.11298/taiki.56.96>

4次 del Pezzo 曲面上の空間曲線の trisecant line の本数について

山田明*

東海大学 理学研究科数理科学専攻
〒259-1292 平塚市北金目 4-1-1
(2025 年 10 月 8 日受付；2025 年 12 月 5 日受理)

On the Number of Trisecant Lines of Space Curves Lying on a Quartic Del Pezzo Surface

by

Akira YAMADA*

*Course of Mathematics and Mathematical Sciences, Graduate School of Science,
Tokai University
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa, 259-1292, Japan*

*Corresponding author: E-mail: 4CSFM006@tokai.ac.jp, ayamda00000@gmail.com
(Received on Oct. 8, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

We compute the number of trisecant lines of curves in the projective 4-space \mathbb{P}^4 , when the curves are contained in a smooth del Pezzo surface of degree four. Given a curve in \mathbb{P}^4 , its trisecant line means a straight line in \mathbb{P}^4 that intersects it exactly at three points (counting with multiplicities). By its divisor class, every curve on that surface corresponds to a six-tuple of integers in \mathbb{Z}^6 (satisfying some numerical conditions) and the tuple is called its *standard coordinate*. In this paper, for every integer k at least six, we classify the classes of curves having k trisecant lines by using their standard coordinates.

Keywords: trisecant line; space curve; del Pezzo surface

1 序 章

一般に、射影空間に埋め込まれた代数多様体に対して、重複度を含めて 3 点以上で交わる直線を trisecant line と呼ぶ。代数多様体の trisecant line に関しては、さまざまな先行研究が存在する。古典的な結果としては trisecant lemma が知られており、一般の secant line が trisecant line であるような

空間曲線は平面に含まれることが主張されている ([1]). 一方, \mathbb{P}^4 内の曲線の trisecant line の本数に関しては, 1895 年に Berzolari によって次の事実が証明された: $C \subset \mathbb{P}^4$ を種数 g , 次数 d の非特異曲線とすると, C が有限個の trisecant line を持つならば, その本数は重複度を含めて

$$\frac{(d-2)(d-3)(d-4)}{6} - g(d-4)$$

に等しい (Ballico-Cossidente [2] 参照). Berzolari の結果は, \mathbb{P}^4 内の直線をパラメータづける Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2,5)$ 上での交点数の計算から導かれるため, trisecant line の本数は重複度こみでの数え上げの結果となっている. さらに, trisecant line は曲線と丁度 3 点で交わる直線とは限らないことに注意する. また, 曲面の trisecant line を扱った研究としては, Russo-Staglianò [3] や Bauer [4] などが知られている.

本論文においては, 空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^4$ に対して, 重複度を含めてちょうど 3 点で交わるような直線を曲線 C の狭義の trisecant line と定義し, 4 次元射影空間内の del Pezzo 曲面上の空間曲線の狭義の trisecant line の本数について調べる. 上で述べた Berzolari による trisecant line の数え上げ公式は, trisecant line の定義が異なるため, (与えられた曲線とちょうど 3 点で交わるような) 狭義の trisecant line の本数には一般に一致しない. また重複度を含めた数え上げであることから, (通常の広義の) trisecant line の実際の本数とも乖離が見られる. そこで本論文では上記の曲線に対し, 狭義の trisecant line の実際の本数について計算する. del Pezzo 曲面は 2 次元の Fano 多様体としてよく知られた重要なクラスの曲面であり, 曲面上の空間曲線に関する性質について調べるために便利である. 補題 2.1 より, 4 次 del Pezzo 曲面上の曲線の狭義の trisecant line は, 曲面上の 16 本の直線のみに限られるため都合がよい. さらに, 4 次 del Pezzo 曲面上の曲線は標準座標を用いることにより, 組み合わせ論的に trisecant line の本数を求めることができる.

非特異射影曲面 S の反標準因子 $-K_S$ が豊富であるとき, S は del Pezzo 曲面と呼ばれる. $-K_S$ の自己交点数 $(-K_S)^2$ を del Pezzo 曲面の次数と呼ぶ. 任意の 4 次 del Pezzo 曲面 S_4 は (いずれの 3 点も同一直線上に存在しない) 一般の 5 点における \mathbb{P}^2 のブローアップと同型であり, 反標準因子 $-K_{S_4}$ によって \mathbb{P}^4 に埋め込むことができる. \mathbb{P}^2 の直線の引き戻しの因子類 \mathbf{l} と 5 個の例外曲線の因子類 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5$ は, S_4 のピカル群 $\text{Pic } S_4$ の自由基底をなし, $\text{Pic } S_4 \simeq \mathbb{Z}^6$ となる.

定義 1.1 ([5]) 4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の任意の因子 D は $D \sim a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 b_i \mathbf{e}_i$ ($a, b_i \in \mathbb{Z}$) と表される. このとき, 6 つの整数の組 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ を D の座標と呼び, $D \sim (a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ と表す. また, 任意の D に対し, その座標が

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \text{ かつ } a \geq b_1 + b_2 + b_3 \quad (1.1)$$

を満たすような適当な \mathbb{P}^2 のブローアップ $\pi: S_4 \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在し, その基底 $\{\mathbf{l}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5\}$ に関する座標を D の標準座標という.

因子類 \mathbf{l}, \mathbf{e}_i ($1 \leq i \leq 5$) は次の交点数をもつ:

$$\mathbf{l}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i^2 = -1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j).$$

特に, 因子 $D \sim a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 b_i \mathbf{e}_i$ ($a, b_i \in \mathbb{Z}$) の自己交点数は, $D^2 = a^2 - \sum_{i=1}^5 b_i^2$ である.

反標準因子 $-K_S$ との交点数が 1 となる有理曲線を del Pezzo 曲面上の直線と定義する. del Pezzo 曲面上の直線は \mathbb{P}^4 内の直線となり, 曲面上の (-1) -曲線となる. [6] の Proposition IV.12 より, 4 次 del Pezzo 曲面上の直線のクラスは, \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ ($1 \leq i < j \leq 5$), $2\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i$ と表される. これらの直線を便宜上それぞれ [I] 型, [II] 型, [III] 型の直線と定めると, その本数は表 1

のようになる. 4次 del Pezzo 曲面上の曲線 C に対して, [I] 型の直線のうち x 本, [II] 型の直線のうち y 本, [III] 型の直線のうち z 本が C の trisecant line になるとき, C を (x, y, z) 型の曲線と呼ぶことにする. 以下では曲面 S_4 上の直線と直線の属するクラスを同一視する.

表 1 直線の種類とその本数

型	直線のクラス	直線の本数
[I]	$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$	5
[II]	$\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j (1 \leq i < j \leq 5)$	10
[III]	$2\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i$	1

以下の定理 1.2 が本論文の主結果であり, trisecant line の本数が大きいとき, 曲線の標準座標に对称性が現れることを主張する. 以下, 曲線又は空間曲線といえ, (4次 del Pezzo 曲面上の) 非特異既約曲線とし, 空間曲線の trisecant line といえ, 曲線と丁度 3 点で交わる \mathbb{P}^4 内の直線 (曲線の狭義の trisecant line) を意味する.

定理 1.2 4次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とするとき, trisecant line が 6 本以上であれば, 次のいずれかが成立する.

- (1) trisecant line が 16 本となる曲線のクラスは, $(5, 10, 1)$ 型の $(9; 3, 3, 3, 3, 3)$ である.
- (2) trisecant line が 10 本となる曲線のクラスは, 次のいずれかである.
 - (i) $(0, 10, 0)$ 型の $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2$)
 - (ii) $(4, 6, 0)$ 型の $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ ($\beta = 0, 1, 2$)
- (3) trisecant line が 8 本となる曲線のクラスは, 次のいずれかである.
 - (i) $(1, 6, 1)$ 型の $(2\beta + 3; 3, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta = 1, 2$)
 - (ii) $(2, 6, 0)$ 型の $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta = 0, 1, 2$)
 - (iii) $(4, 4, 0)$ 型の $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, 3)$ ($\alpha \geq 4$)
- (4) trisecant line が 6 本となる曲線のクラスは, 次のいずれかである.
 - (i) $(0, 6, 0)$ 型の $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ $((\alpha, \beta) = (2, 1), (2, 0), (1, 0))$
 - (ii) $(0, 6, 0)$ 型の $(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ $((\alpha, \beta) = (2, 1), (2, 0), (1, 0))$
 - (iii) $(0, 6, 0)$ 型の $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ $((\alpha, \beta) = (2, 1), (1, 0))$
 - (iv) $(0, 6, 0)$ 型の $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ $((\alpha, \beta) = (2, 1), (2, 0), (1, 0))$
 - (v) $(2, 4, 0)$ 型の $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \gamma)$ $((\beta, \gamma) = (2, 1), (2, 0), (1, 0))$
 - (vi) $(3, 3, 0)$ 型の $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta)$ ($\alpha \geq 4, 0 \leq \beta \leq 2$)
 - (vii) $(3, 3, 0)$ 型の $(9; 3, 3, 3, \alpha, \beta)$ ($2 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$)

特に, trisecant line の本数が 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15 本となる曲線は存在しない.

定理 1.2 のクラスに属す曲線が存在することは, 標準座標に関する条件 (1.1) に加えて $b_5 \geq 0$ と $a > b_1$ を満たすことから導かれる. またそれらの曲線が定理 1.2 で与えられた本数の trisecant line を実際に有すことも, 補題 2.3 からわかる. 著者の知る限り (平面曲線をのぞく) 空間曲線に対し, その trisecant line の実際の本数を計算した先行研究は少なく, 定理は Berzolari の結果などの先行研究を補う結果であるように思われる. 論文全体において, 基礎体は代数閉かつ標数 0 の体であると仮定する.

2 [III] 型の trisecant line と曲線の標準座標

本節では, 主結果の証明のための準備を行う. まず, 4次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線の trisecant

line は, (4 次 del Pezzo) 曲面上の 16 本の直線に限ることの証明を行う.

補題 2.1 4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線の trisecant line は, (4 次 del Pezzo) 曲面上の直線に限る.

証明 S_4 上のある曲線 C の trisecant line を l とすると, C と l の 3 つの交点は, 直線 l を含むような任意の平面 P に含まれる. S_4 を含む任意の 2 次超曲面 Q と P の共通部分 $P \cap Q$ は 2 次曲線になるが, 平面 P 上で 2 次曲線 $P \cap Q$ と l は 3 点で交わることになり, ベズーの定理により, $l \subset P \cap Q$ となる. よって, l は S_4 を含む任意の 2 次超曲面 Q に含まれるので, $l \subset S_4$ となる. \square

定理 1.2 の証明をする上では, [II] 型の trisecant line の本数に着目することが重要である. 以下では, [II] 型の trisecant line の本数が多い場合の曲線のクラス分類を行う. [II] 型の直線が S_4 上の曲線の trisecant line になるとき, 曲線の標準座標や trisecant line の本数は以下のような制約を受ける.

補題 2.2 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とするとき, 次が成り立つ.

- (1) 1 以上 5 以下の相異なる整数 i, j, k に対し, 直線 $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ と $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ が共に C の trisecant line となるならば, $b_j = b_k$ が成り立つ.
- (2) 曲線 C の [II] 型の trisecant line が存在すれば, その本数 n は $n \leq 10$ であり, かつ, $n \neq 5, 7, 8, 9$ を満たす.

証明 以下, trisecant line は, C の trisecant line とする. (1) を示す. 直線 $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ と $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ が共に曲線 $C \sim (a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の trisecant line ならば,

$$a - b_i - b_j = C \cdot (1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = 3 = C \cdot (1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k) = a - b_i - b_k$$

より, $b_j = b_k$ が成り立つ.

(2) を示す. 7 本以上の [II] 型の trisecant line が存在すると仮定する. [II] 型の trisecant line が 7 本あるとすると,

$$3 = C \cdot (1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = a - b_i - b_j \quad \text{かつ } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{かつ } i < j \quad (2.1)$$

となる (i, j) の組が 7 個あるので, b_1, \dots, b_5 という 5 種類の数が計 14 回現れる. このとき, 鳩の巣原理より, この式 (2.1) の中に 3 回以上現れる b_{k_1} ($k_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) が少なくとも 1 つ存在することになる. このことより,

$$\begin{aligned} 3 &= a - b_{k_1} - b_{k_2} \\ &= a - b_{k_1} - b_{k_3} \\ &= a - b_{k_1} - b_{k_4} \quad (k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1\}, k_2 < k_3 < k_4) \end{aligned}$$

と表すことができ, (1) より, $b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$ が成り立つ. このとき, $1 - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_2}, 1 - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_3}, 1 - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_4}$ の 3 本は, [II] 型の trisecant line である. また, $k_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ とすると, $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ となる.

- (i) $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ が [II] 型の trisecant line であるような $i, j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ ($i < j$) が少なくとも 1 組存在するとき, $1 - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_i$ も trisecant line なので, (1) より, $b_{k_1} = b_i$ ($= b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$) となる. ゆえに, $a - b_i - b_j = 3$ ($i, j \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}, i < j$) となるので, 計 6 本の $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ ($i, j \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}, i < j$) が [II] 型の trisecant line となる. 7 本以上の [II]

型の trisecant line が存在すると仮定しているので、少なくとも他に 1 本の [II] 型の trisecant line が存在するが、それは $\mathbf{l} - \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{k_5}$ ($m \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$) と表される。よって、 $a - b_m - b_{k_5} = 3 = a - b_m - b_{m'}$ ($m' \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\} \setminus \{m\}$) より、 $b_{k_5} = b_{m'}$ ($= b_{k_1} = b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$) となるので、任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ($i < j$) に対して、 $a - b_i - b_j = 3$ となり、[II] 型の trisecant line は 10 本となる。

図 1 は、直線が曲線の trisecant line になっていく状況を視覚化したものであり、証明の流れを理解するために役立つかもしれない。直線 $\mathbf{l} - \mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_{k_j}$ ($i < j$) が trisecant line となると、表の k_i 行 k_j 列目に 2 つの記号 \circ と \odot を記入して、証明の流れを表している。矢印は証明のステップに対応し、 \circ は前のステップで trisecant line であることが確定した直線に対応し、 \odot は次のステップで新たに trisecant line であることがわかる直線に対応する。以降の証明においても同様の図を用いる。

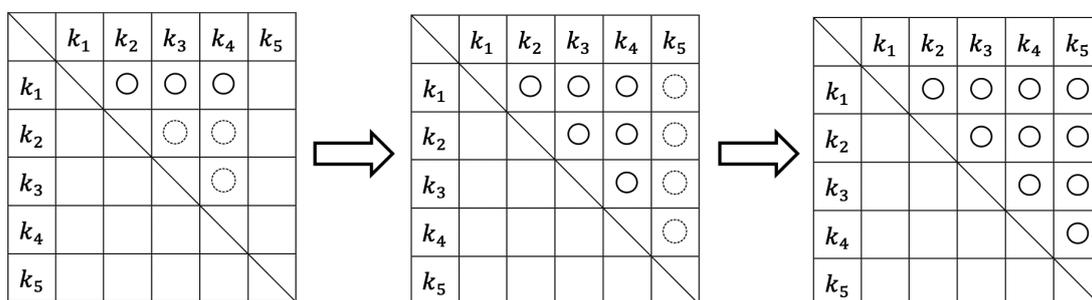


図 1 (i) の場合

(ii) $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ が [II] 型の trisecant line であるような $i, j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ ($i < j$) が存在しないとすると、残りの 4 本の [II] 型の trisecant line は、 $\mathbf{l} - \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{k_5}$ ($m \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$) と表される。よって、 $a - b_{k_1} - b_{k_5} = 3 = a - b_{k_2} - b_{k_5}$ より、 $b_{k_1} = b_{k_2}$ である。また、 $a - b_{k_1} - b_{k_2} = 3 = a - b_{k_1} - b_{k_5}$ より、 $b_{k_2} = b_{k_5}$ であるので、 $b_{k_1} = b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4} = b_{k_5}$ となる。ゆえに、任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ($i < j$) に対して、 $a - b_i - b_j = 3$ となり、[II] 型の trisecant line は 10 本となる。(図 2 参照)

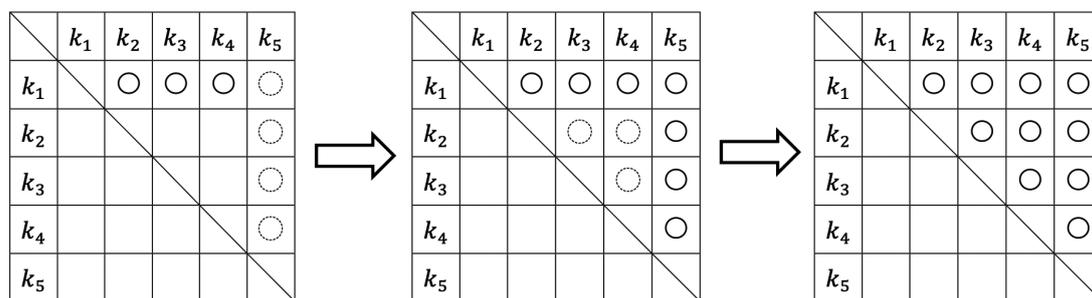


図 2 (ii) の場合

したがって、(i), (ii) より、7 本以上の [II] 型の trisecant line が存在するとき、[II] 型の trisecant line は 10 本となる。

少なくとも 5 本の [II] 型の trisecant line が存在すると仮定する。[II] 型の trisecant line が 5 本あるとすると、条件 (2.1) を満たす (b_i, b_j) の組が 5 個ある。このとき、 b_1, \dots, b_5 という 5 種類の数が計

10 回現れることになるが、鳩の巣原理より、全ての b_1, \dots, b_5 が 2 回ずつ現れるか、3 回以上現れる b_{k_1} ($k_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) が少なくとも 1 つ存在するかのいずれかとなる。

(iii) 全ての b_1, \dots, b_5 が 2 回ずつ現れるとき、 $a - b_{i_1} - b_{i_2} = a - b_{i_2} - b_{i_3} = a - b_{i_3} - b_{i_4} = a - b_{i_4} - b_{i_5} = a - b_{i_5} - b_{i_1} = 3$ ($\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) となり、(1) より、 $b_{i_1} = b_{i_2} = b_{i_3} = b_{i_4} = b_{i_5}$ すなわち、 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$ となるので、任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ($i < j$) に対して、 $a - b_i - b_j = 3$ となり、[II] 型の trisecant line は 10 本となる。

(iv) 3 回以上現れる b_{k_1} ($k_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) が少なくとも 1 つ存在するとき、

$$3 = a - b_{k_1} - b_{k_2} = a - b_{k_1} - b_{k_3} = a - b_{k_1} - b_{k_4}$$

が成り立つような $k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1\}$ ($k_2 < k_3 < k_4$) が存在する。(1) より、 $b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$ が成り立つ。さらに、 $k_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ とすると、 $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ となる。残り 2 本以上の [II] 型の trisecant line のうち、少なくとも 1 本は、 $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ ($i, j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ $i < j$) と表されるか $1 - \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{k_5}$ ($m \in \{k_2, k_3, k_4\}$) と表されるかのいずれかである。(仮に、trisecant line が残り 2 本で、2 本のうちの 1 本が $1 - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_5}$ であったとしてももう 1 本は上記のいずれかになる。)

(a) $1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ ($i, j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ $i < j$) と表される [II] 型の trisecant line が少なくとも 1 本存在するとき、 $a - b_i - b_j = 3 = a - b_{k_1} - b_j$ より、 $b_{k_1} = b_i$ ($= b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$) となり、任意の $i, j \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ ($i < j$) に対して、 $a - b_i - b_j = 3$ となり、少なくとも 6 本の [II] 型の trisecant line が存在する。(図 3 参照)

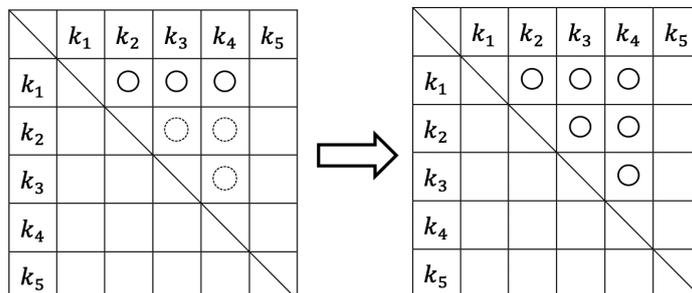


図 3 (iv) (a) の場合

(b) $1 - \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{k_5}$ ($m \in \{k_2, k_3, k_4\}$) と表される [II] 型の trisecant line が少なくとも 1 本存在するとき、 $a - b_m - b_{k_5} = 3 = a - b_{k_1} - b_m$ より、 $b_{k_1} = b_{k_5}$ となるので、全ての $m \in \{k_2, k_3, k_4\}$ に対して、 $a - b_m - b_{k_5} = 3$ となる。よって、任意の $i \in \{k_1, k_5\}$, $j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ に対して、 $a - b_i - b_j = 3$ となり、少なくとも計 6 本の [II] 型の trisecant line が存在する。(図 4 参照)

したがって、(iii), (iv) より、少なくとも 5 本の [II] 型の trisecant line が存在するとき、6 本以上の [II] 型の trisecant line が存在する。以上のことより、4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線 C の [II] 型の trisecant line の本数 n は $0 \leq n \leq 4$ または $n = 6, n = 10$ を満たす。□

4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C と重複度を含めて丁度 n 点 ($n \geq 0$) で交わる直線を n -secant line と呼ぶ。すなわち、trisecant line は 3-secant line である。 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の部分を 5 の分割 $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$ とその順序を交換した場合に対応させることにより、それぞれ [II] 型の n -secant line の本数は以下のように与えられる。

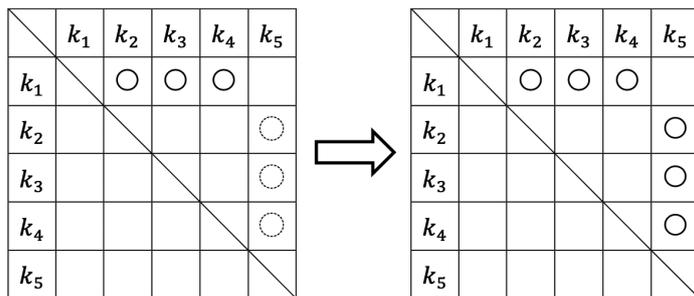


図 4 (iv) (b) の場合

補題 2.3 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とするとき、以下のように、計 10 本の [II] 型の n -secant line をそれぞれ持つことがわかる。

- (1) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ ($\alpha \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 10 本持つ。
- (2) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 6 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 4 本持つ。
- (3) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\beta)$ -secant line を 6 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 4 本持つ。
- (4) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 6 本、 $(a - 2\beta)$ -secant line を 1 本持つ。
- (5) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 6 本、 $(a - 2\beta)$ -secant line を 3 本持つ。
- (6) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 3 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 1 本持つ。
- (7) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\beta)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 1 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 3 本持つ。
- (8) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \gamma, \gamma, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\gamma)$ -secant line を 3 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 3 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 3 本持つ。
- (9) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 1 本、 $(a - 2\beta)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 4 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 2 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 2 本持つ。
- (10) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 1 本、 $(a - 2\gamma)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 4 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 2 本持つ。
- (11) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\beta)$ -secant line を 1 本、 $(a - 2\gamma)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 2 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 4 本持つ。
- (12) 曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ($\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\alpha)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 2 本、 $(a - \alpha - \delta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 1 本、 $(a - \beta - \delta)$ -secant line を 1 本、 $(a - \gamma - \delta)$ -secant line を 1 本持つ。
- (13) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \delta)$ ($\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0$) は、[II] 型の $(a - 2\beta)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \beta - \gamma)$ -secant line を 2 本、 $(a - \beta - \delta)$ -secant line を 2 本、 $(a - \alpha - \gamma)$ -secant line を 1 本、 $(a - \alpha - \delta)$ -secant line を 1 本、 $(a - \gamma - \delta)$ -secant line を 1 本持つ。

- (14) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \gamma, \gamma, \delta)$ ($\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0$) は, [II] 型の $(a-2\gamma)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\gamma)$ -secant line を 2 本, $(a-\beta-\gamma)$ -secant line を 2 本, $(a-\gamma-\delta)$ -secant line を 2 本, $(a-\alpha-\beta)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\delta)$ -secant line を 1 本, $(a-\beta-\delta)$ -secant line を 1 本持つ.
- (15) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta)$ ($\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0$) は, [II] 型の $(a-2\delta)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\delta)$ -secant line を 2 本, $(a-\beta-\delta)$ -secant line を 2 本, $(a-\gamma-\delta)$ -secant line を 2 本, $(a-\alpha-\beta)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\gamma)$ -secant line を 1 本, $(a-\beta-\gamma)$ -secant line を 1 本持つ.
- (16) 曲線 $(a; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ ($\alpha > \beta > \gamma > \delta > \epsilon \geq 0$) は, [II] 型の $(a-\alpha-\beta)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\gamma)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\delta)$ -secant line を 1 本, $(a-\alpha-\epsilon)$ -secant line を 1 本, $(a-\beta-\gamma)$ -secant line を 1 本, $(a-\beta-\delta)$ -secant line を 1 本, $(a-\beta-\epsilon)$ -secant line を 1 本, $(a-\gamma-\delta)$ -secant line を 1 本, $(a-\gamma-\epsilon)$ -secant line を 1 本, $(a-\delta-\epsilon)$ -secant line を 1 本持つ.

証明 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $a - b_1 - b_2 \geq b_3 \geq 0$ であるので, 任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して, $a - b_i - b_j \geq 0$ である. 標準座標 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ をもつ曲線は, 任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ($i \neq j$) に対して, [II] 型の直線 $1 - e_i - e_j$ と $(a - b_i - b_j)$ 点で交わる. よって, (1) の標準座標 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ ($\alpha \geq 0$) を持つ曲線は, $(a - 2\alpha)$ -secant line を ${}_5C_2 = 10$ 本持つ. (2) の標準座標 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) を持つ曲線は, $(a - 2\alpha)$ -secant line を ${}_4C_2 = 6$ 本, $(a - \alpha - \beta)$ -secant line を ${}_4C_1 \cdot {}_1C_1 = 4$ 本持つ. 以下同様にして上記の結果が導かれる. \square

補題 2.3 の (1) から (16) のうち, [II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本となる場合を考える. この場合, 曲線の標準座標 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ において b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 の 5 つの値の取り方は, 次の補題 2.4 より, 4 つの同じ値が現れるか, 3 つの同じ値と 2 つの同じ値が現れるかのいずれかである. これらの標準座標 (又は曲線のクラス) をポーカーの役に見立てて, それぞれフォーカード型, フルハウス型と呼ぶ.

補題 2.4 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C が, [II] 型の trisecant line を丁度 6 本もつとき, C の標準座標は,

$$(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta), (2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta), \\ (\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta), (\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta) \quad (\alpha > \beta \geq 0)$$

のいずれかに等しい.

証明 補題 2.3(2),(3),(4),(5) より, 標準座標

$$(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta), (2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta), \\ (\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta), (\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta) \quad (\alpha > \beta \geq 0)$$

を持つ曲線は, 6 本の [II] 型の trisecant line を持つ. また, 逆に 6 本の [II] 型の trisecant line を持つ曲線は他に存在しない. 例えば, (6) の場合が 6 本の [II] 型の trisecant line を持つとすると, $a - 2\alpha = a - \alpha - \beta$ 又は $a - 2\alpha = a - \alpha - \gamma$ 又は $a - \alpha - \beta = a - \alpha - \gamma$ となるが, これは $\alpha > \beta > \gamma$ に矛盾する. 他の場合も同様に $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ の大小関係に矛盾する. \square

注意 2.5 補題 2.4 により, [II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本になるならば, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ は, フォーカード型かフルハウス型であるが, 逆は正しくない. 実際, 標準座標 $(10; 1, 1, 1, 1, 0)$, $(10; 1, 1, 1, 0, 0)$ はフォーカード型やフルハウス型であるが, [II] 型の trisecant line は存在しない.

補題 2.3 の (1) から (16) のうち, [II] 型の trisecant line の本数が丁度 4 本となる場合を考える. [II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本となる場合と同じように議論をすることができて, 曲線の標準座標は次の補題 2.6 のようにフォーカード型, ツーペア型, スリーカード型となる.

補題 2.6 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C が, [II] 型の trisecant line を丁度 4 本もつとき, C の標準座標は,

$$\begin{aligned} &(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha + \beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta) \quad (\alpha > \beta \geq 0), \\ &(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma), (\alpha + \gamma + 3; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \gamma), (\beta + \gamma + 3; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma) \quad (\alpha > \beta > \gamma \geq 0), \\ &(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma) \quad (\alpha > \beta > \gamma \geq 0 \text{ かつ } 2\beta = \alpha + \gamma) \end{aligned}$$

のいずれかに等しい.

証明 補題 2.6 で与えられた 6 個の標準座標のうち, 最後の標準座標を除き, 補題 2.3(2),(3),(9),(10),(11) より, 曲線が 4 本の [II] 型の trisecant line を持つことは明らかである. 最後の標準座標を持つ曲線は, 補題 2.3(7) と $a - 2\beta = a - \alpha - \gamma = 3$ より, 4 本の [II] 型の trisecant line を持つ.

逆に, 曲線が 4 本の [II] 型の trisecant line を持つと仮定する. 補題 2.3 の (1) から (16) のそれぞれの場合において, [II] 型の trisecant line が合わせて 4 本となる場合について考えると, 補題 2.6 の 6 つの場合以外の標準座標の曲線は, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ の大小関係と補題 2.2(1) より, 丁度 4 本の [II] 型の trisecant line を持たない. 例えば, (6) の場合が丁度 4 本の [II] 型の trisecant line を持つと仮定すると,

$$a - 2\alpha = a - \beta - \gamma = 3 \text{ 又は } a - \alpha - \beta = a - \beta - \gamma = 3 \text{ 又は } a - \alpha - \gamma = a - \beta - \gamma = 3$$

が成り立つが, $\alpha > \beta > \gamma$ に矛盾する. □

3 主結果の証明

本節では, 定理 1.2 を証明する.

証明 以下, [II] 型の trisecant line の本数により, 場合分けによって証明する. まず, [II] 型の直線 10 本すべてが trisecant line となる場合を考える. このとき, 補題 2.2 より, 任意の $1 \leq i < j \leq 5$ に対して, $b_i = b_j$ であり, $C \cdot (1 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = a - 2b_i = 3$ である. よって $b_i = \alpha$ とおくと, その曲線のクラスの標準座標は, $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ となる. また, 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $3 \geq \alpha$ である.

$\alpha = 3$ のとき, $a = 2\alpha + 3 = 9$ となり, その曲線の標準座標は $(9; 3, 3, 3, 3, 3)$ である. よって, 任意の $1 \leq i < j \leq 5$ に対して, $C \cdot \mathbf{e}_i = 3$ なので, [I] 型の trisecant line は 5 本あり, $2a - \sum_{i=1}^5 b_i = C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 3$ が成り立つので, [III] 型の直線 $2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i$ も trisecant line になる. ゆえに, 標準座標 $(9; 3, 3, 3, 3, 3)$ をもつ曲線は, $(5, 10, 1)$ 型となり, 曲面上の全ての直線が trisecant line となる. (定理 1.2(1) の場合である.)

$\alpha \leq 2$ のとき, 標準座標は $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2$) であるが, $C \cdot \mathbf{e}_i = b_i = \alpha \neq 3$ なので, [I] 型の trisecant line は 0 本となる. [III] 型の直線に関しては, $\alpha \neq 3$ より, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2a - 5b_i = 2(2\alpha + 3) - 5\alpha = 6 - \alpha \neq 3$ となるので, [III] 型の trisecant line は 0 本となる. よって, 標準座標 $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2$) をもつ曲線は, $(0, 10, 0)$ 型の曲線である. (定理 1.2(2)(i))

の場合である.)

次に, [II] 型の trisecant line が 6 本となる場合を考える. 補題 2.4 より, その曲線の標準座標は, フォーカード型 $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$, $(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$), もしくはフルハウス型 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$, $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ ($\alpha > \beta \geq 0$) のいずれかである. 標準座標の $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の部分に注目して, これらの標準座標をそれぞれ [4, 1] 型, [1, 4] 型, [3, 2] 型, [2, 3] 型と呼ぶことにする.

[4, 1] 型: 標準座標 $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $2\alpha + 3 \geq 3\alpha$ なので, $\alpha \leq 3$ となる.

$\alpha = 3$ のとき, 標準座標は $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ ($\beta < 3$) であるが, このとき, [I] 型の trisecant line は 4 本で, $\beta \neq 3$ より, $2a - \sum_{i=1}^5 b_i = 6 - \beta \neq 3$ なので [III] 型の trisecant line は 0 本となる. ゆえに, 標準座標 $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ ($\beta < 3$) をもつ曲線は (4, 6, 0) 型の曲線である. (定理 1.2(2) の (ii) の場合である.)

$\alpha \leq 2$ のとき, 標準座標は $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ であるが, $3 > \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant line は 0 本で, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(2\alpha + 3) - 4\alpha - \beta = 6 - \beta \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本であるので, 標準座標 $(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ ($2 \geq \alpha > \beta$) をもつ曲線は (0, 6, 0) 型の曲線である. (定理 1.2(4) の (i) の場合である.)

[1, 4] 型: 標準座標 $(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $2\beta + 3 \geq \alpha + 2\beta$ なので, $\alpha \leq 3$ となる.

$\alpha = 3$ のとき, 標準座標は $(2\beta + 3; 3, \beta, \beta, \beta, \beta)$ であり, $3 = \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant line は 1 本で, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(2\beta + 3) - 3 - 4\beta = 3$ より, [III] 型の trisecant line は 1 本である. しかし, $\beta = 0$ のときは 3 つの 2 次曲線 ($\sim (1; 1, 0, 0, 0, 0)$) の非交叉和のクラスとなるので, 既約曲線のクラスでない. よって, $\beta \neq 0$ なので, 標準座標 $(2\beta + 3; 3, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta = 1, 2$) をもつ (1, 6, 1) 型の曲線である. (定理 1.2(3) の (i) の場合である.)

$\alpha \leq 2$ のとき, 標準座標は $(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ であり, $3 > \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant line は 0 本で, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(2\beta + 3) - \alpha - 4\beta = 6 - \alpha \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本である. よって, 標準座標 $(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($2 \geq \alpha > \beta$) をもつ曲線は, (0, 6, 0) 型の曲線である. (定理 1.2(4) の (ii) の場合である.)

[3, 2] 型: 標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $\alpha + \beta + 3 \geq 3\alpha$ で, $2\alpha \leq \beta + 3 < \alpha + 3$ が成り立つ. 従って, $3 > \alpha$ を得る. 同じ不等式から $(\alpha, \beta) = (2, 1)$, 又は $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ が成り立つ. 標準座標は $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ であり, $3 > \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant line は 0 本で, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\alpha + \beta + 3) - 3\alpha - 2\beta = 6 - \alpha \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本である. よって, 標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ ($(\alpha, \beta) = (2, 1), (1, 0)$) をもつ曲線は, (0, 6, 0) 型の曲線である. (定理 1.2(4) の (iii) の場合である.)

[2, 3] 型: 標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $\alpha + \beta + 3 \geq 2\alpha + \beta$ で, $\alpha \leq 3$ となる.

$\alpha = 3$ のとき, 標準座標は $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \beta)$ であり, $3 = \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant line は 2 本で, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\beta + 6) - 6 - 3\beta = 6 - \beta \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本である. よって, 標準座標 $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta \leq 2$) をもつ曲線は, (2, 6, 0) 型の曲線である. (定理 1.2(3) の (ii) の場合である.)

$\alpha \leq 2$ のとき, 標準座標は $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ であり, $3 > \alpha > \beta$ より, [I] 型の trisecant

line は 0 本で, $C.(2l - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\alpha + \beta + 3) - 2\alpha - 3\beta = 6 - \beta \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本である. よって, 標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ ($2 \geq \alpha > \beta$) をもつ曲線は, $(0, 6, 0)$ 型の曲線である. (定理 1.2(4) の (iv) の場合である.)

次に, [II] 型の直線 4 本が trisecant line となる場合を考える. 補題 2.6 より, そのような曲線の標準座標は, フォーカード型の

$$(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha + \beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta) \quad (\alpha > \beta > 0)$$

又は, ツーペア型の

$$(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma), (\alpha + \gamma + 3; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \gamma), (\beta + \gamma + 3; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma) \quad (\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$$

又は, スリーカード型の

$$(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma) \quad (\alpha > \beta > \gamma \geq 0 \text{ かつ } 2\beta = \alpha + \gamma)$$

のいずれかである. これらの標準座標をそれぞれ $[4, 1]'$ 型, $[1, 4]'$ 型, $[2, 2, 1]$ 型, $[2, 1, 2]$ 型, $[1, 2, 2]$ 型, $[1, 3, 1]$ 型と呼ぶ. [II] 型の trisecant line が 4 本なので, trisecant line が 6 本以上となるためには, 少なくとも [I] 型の trisecant line が 1 本以上なければならない. すなわち, フォーカード型のとき $\alpha = 3$ 又は $\beta = 3$ が成り立ち, ツーペア型又はスリーカード型のとき $\alpha = 3$ 又は $\beta = 3$ 又は $\gamma = 3$ が成り立つ.

(a) $[4, 1]'$ 型の標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ をもつ曲線について考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $\alpha + \beta + 3 \geq 3\alpha$ で $2\alpha \leq \beta + 3 < \alpha + 3$ となり, $3 > \alpha$ となるので, 条件に反する.

(b) $[1, 4]'$ 型の標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ をもつ曲線について考える.

$\beta = 3$ のとき, 標準座標は, $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, 3)$ ($\alpha > 3$) となるので, [I] 型の trisecant line は 4 本であり, $C.(2l - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\alpha + 6) - \alpha - 12 = \alpha \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本となるので, 標準座標 $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, 3)$ ($\alpha > 3$) をもつ曲線は, $(4, 4, 0)$ 型の曲線である. (定理 1.2(3) の (iii) の場合である.)

$\alpha = 3$ のとき, 標準座標は, $(\beta + 6; 3, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta < 3$) となるので, [I] 型の trisecant line は 1 本であり, $C.(2l - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\beta + 6) - 4\beta - 3 = 9 - 2\beta \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本となるので, 標準座標 $(\beta + 6; 3, \beta, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta < 3$) をもつ曲線は $(1, 4, 0)$ 型であり, trisecant line が 5 本となり, 条件に反する.

(c) $[2, 2, 1]$ 型の標準座標 $(\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma)$ をもつ曲線について考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $\alpha + \beta + 3 \geq 2\alpha + \beta$ で $3 \geq \alpha$ となる.

$\alpha = 3$ となり, 標準座標は, $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \gamma)$ となるので, [I] 型の trisecant line は 2 本であり, $C.(2l - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\beta + 6) - 6 - 2\beta - \gamma = 6 - \gamma \neq 3$ より, [III] 型の trisecant line は 0 本となるので, 標準座標 $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \gamma)$ ($3 > \beta > \gamma$) をもつ曲線は, $(2, 4, 0)$ 型の曲線である. (定理 1.2(4) の (v) の場合である.)

(d) $[2, 1, 2]$ 型の標準座標 $(\alpha + \gamma + 3; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma$) をもつ曲線について考える. 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $\alpha + \gamma + 3 \geq 2\alpha + \beta$ で $\gamma + 3 \geq \alpha + \beta > \alpha + \gamma$ が導かれるので, 条件に反する.

同様に, $[1, 2, 2]$ 型の標準座標 $(\beta + \gamma + 3; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma)$ ($\alpha > \beta > \gamma$) をもつ曲線について, 標準座標の条件から $3 > \alpha$ が導かれるので, 条件に反する.

(e) [1, 3, 1] 型の標準座標

$$(2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma) \quad (2\beta = \alpha + \gamma \text{ かつ } \alpha > \beta > \gamma \geq 0)$$

をもつ曲線について考える. このとき, 標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ より, $2\beta + 3 \geq \alpha + 2\beta$ で, $3 \geq \alpha$ となり, $\alpha = 3$ が従う. [I] 型の trisecant line は 1 本で, [III] 型の trisecant line は $2(2\beta + 3) - \alpha - 3\beta - (2\beta - \alpha) = 6 - \beta > 3$ より 0 本なので, (1, 4, 0) 型となり条件に反する.

最後に, [II] 型の trisecant line が 3 本以下となる曲線について考える. このとき [I] 型の trisecant line が 2 本以上存在する.

[I] 型の trisecant line が 5 本となる曲線の標準座標は $(a, 3, 3, 3, 3)$ だが, $a \neq 9$ より, [II] 型と [III] 型の trisecant line は共に 0 本であり, 6 本以上の trisecant line が存在しない.

[I] 型の trisecant line が 4 本となる曲線は, [II] 型の trisecant line が 0 本となり, trisecant line の本数の合計が 6 本以上とならない.

[I] 型の trisecant line が 3 本となる曲線で, trisecant line の合計が 6 本以上になるのは, [II] 型 trisecant line が 2 本又は 3 本ある場合なので, 補題 2.3(4)(5)(6)(7)(8) より, 標準座標が,

$$(\alpha + 6; 3, 3, 3, \alpha, \beta), (\beta + 6; 3, 3, 3, \alpha, \beta), (9; 3, 3, 3, \alpha, \beta), (\alpha + 6; \alpha, \beta, 3, 3, 3), (\beta + 6; \alpha, \beta, 3, 3, 3), \\ (9; \alpha, \beta, 3, 3, 3), (\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta), (\beta + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta), (9; \alpha, 3, 3, 3, \beta) \quad (\alpha \geq \beta \geq 0)$$

となる場合だが, これらの中で標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ かつ $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5$ を満たすのは, $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta), (9; 3, 3, 3, \alpha, \beta)$ の 2 通りのみである.

標準座標 $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta)$ ($\alpha \geq 4, \beta \leq 2$) は, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 2(\alpha + 6) - \alpha - \beta - 9 = 3 + \alpha - \beta \geq 7 - \beta > 3$ より, (3, 3, 0) 型の曲線となる. (定理 1.2(4) の (vi) の場合である.)

標準座標 $(9; 3, 3, 3, \alpha, \beta)$ ($3 > \alpha \geq \beta$) は, $C \cdot (2\mathbf{1} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i) = 9 - \alpha - \beta > 3$ より, (3, 3, 0) 型の曲線となる. (定理 1.2(4) の (vii) の場合である.)

[I] 型の trisecant line が 2 本となる曲線で, [II] 型 trisecant line が 3 本以下で trisecant line の合計が 6 本以上になる可能性があるのは, (2, 3, 1) 型のみであり, その標準座標は, フルハウス型, ツーペア型, ワンペア型のみなので, 補題 2.3 より, フルハウス型, ツーペア型の

$$(2\alpha + 3; \alpha, \alpha, \alpha, 3, 3), (2\beta + 3; 3, 3, \beta, \beta, \beta), (9; \alpha, \alpha, 3, 3, \gamma), \\ (2\beta + 3; 3, 3, \beta, \beta, \gamma), (\alpha + \beta + 3; \alpha, \alpha, \beta, 3, 3), \\ (2\gamma + 3; 3, 3, \beta, \gamma, \gamma), (2\beta + 3; \alpha, \beta, \beta, 3, 3), (9; \alpha, 3, 3, \gamma, \gamma) \quad (\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$$

のいずれかかワンペア型の

$$(a; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta), (a; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \delta), (a; \alpha, \beta, \gamma, \gamma, \delta), (a; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta) \quad (\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0)$$

のいずれかになるが, フルハウス型, ツーペア型の 8 個はいずれも標準座標の条件を満たさない. ワンペア型の 4 つの座標において, [II] 型 trisecant line が 3 本であるためには, $a - \alpha - \beta < a - \gamma - \delta$ かつ $a - \alpha - \gamma < a - \beta - \delta$ より, $a - \alpha - \delta = a - \beta - \gamma = 3$ とならなければならない. また, [I] 型 trisecant line が 2 本であるので, 標準座標の中で 2 度出てくる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のいずれか 1 つが 3 とならなければならない. しかし, いずれの場合も標準座標の条件 $a \geq b_1 + b_2 + b_3$ を満たさず, 上記のような曲線のクラスは存在しない. 以上によって trisecant line が 6 本以上になる曲線の分類が完了し, trisecant line が 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15 本となる曲線は存在せず, 上で示した標準座標以外の曲線の trisecant line の本数は 5 本以下となる. \square

注意 3.1 定理 1.2 では, 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線の trisecant line の本数の分類を標準座標を用いて与えた. 標準座標の条件 (1.1) を考慮せずに単に因子の座標としてみれば, 定理 1.2 の分類結果を単純化することができる. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の像を基点とする \mathbb{P}^2 上の Cremona 変換を 4 次 del Pezzo 曲面上に引き戻した $\text{Pic } S_4$ の座標変換を τ とすれば, 4 次 del Pezzo 曲面上の因子 $\mathbf{l}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5$ は, τ により以下のように写される.

$$\begin{cases} \tau(\mathbf{l}) = 2\mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \tau(\mathbf{e}_1) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, & \tau(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4, \\ \tau(\mathbf{e}_2) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, & \tau(\mathbf{e}_5) = \mathbf{e}_5, \\ \tau(\mathbf{e}_3) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

τ に加えて, 例外曲線 \mathbf{e}_i ($1 \leq i \leq 5$) の互換を用いると, 主結果の定理 1.2 の (1) から (4) までの trisecant line の本数に基づいた曲線のクラスは以下のように表される:

- (1) trisecant line が 16 本となる曲線のクラスは, $(9; 3, 3, 3, 3, 3)$ である.
- (2) trisecant line が 10 本となる曲線のクラスは, $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ ($\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6$) である.
- (3) trisecant line が 8 本となる曲線のクラスは, 次のいずれかである.
 - (a) $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, 3)$ ($\alpha \geq 1$ かつ $\alpha \neq 3$)
 - (b) $(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \beta)$ ($\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6$)
- (4) trisecant line が 6 本となる曲線のクラスは, 次のいずれかである.
 - (a) $(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta)$ ($\alpha \geq 0$ かつ $0 \leq \beta \leq 2$ かつ $3 \neq \alpha \neq \beta$)
 - (b) $(9; 3, 3, 3, \alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta) = (4, 0), (4, 1), (4, 4), (5, 0), (5, 2), (5, 4), (6, 1), (6, 2)$ または $2 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$)

ここで, 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ と表すが, この座標は標準座標の条件を必ずしも満たさない.

例 3.2 注意 3.1 で表されている曲線のクラスは標準座標とは限らない. 例えば, 定理 1.2(2)(i) で $\alpha = 1$ としたときの曲線のクラス $(5; 1, 1, 1, 1, 1)$ は, 注意 3.1 では trisecant line が 10 本のクラス $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ ($\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6$) に含まれていないようにみえるが, Cremona 変換が誘導する座標変換 τ と互換の積によって

$$\begin{aligned} (5; 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (7; 3, 3, 3, 1, 1) \quad (\tau \text{ を施す}) \\ &\rightarrow (7; 3, 1, 1, 3, 3) \quad (\text{互換の積を施す}) \\ &\rightarrow (9; 5, 3, 3, 3, 3) \quad (\tau \text{ を施す}) \\ &\rightarrow (9; 3, 3, 3, 3, 5) \quad (\text{互換の積を施す}) \end{aligned}$$

となることにより, $(5; 1, 1, 1, 1, 1)$ は標準座標の条件を満たさない座標 $(9, 3, 3, 3, 3, 5)$ にうつり, 注意 3.1(2) の曲線のクラスに含まれる.

最後に表 2 において, 4 次 del Pezzo 曲面に含まれる次数が 3 以上かつ 12 以下の空間曲線の各クラスに対し, 曲線の次数 d と種数 g , 標準座標 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, そのクラスに属す曲線がもつ trisecant line の本数を示す.

表 2 標準座標ごとの trisecant line の本数

(d, g)	$(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$	(x, y, z)	trisecant line の本数
(3, 0)	(1; 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(4, 0)	(2; 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(4, 1)	(3; 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0)	0
(5, 0)	(2; 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1)	1
(5, 1)	(3; 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0)	0
(6, 0)	(2; 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(6, 0)	(3; 2, 1, 0, 0, 0)	(0, 3, 1)	4
(6, 1)	(3; 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 1, 1)	2
(6, 2)	(4; 2, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0)	0
(7, 0)	(3; 2, 0, 0, 0, 0)	(0, 6, 0)	6
(7, 1)	(3; 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 3, 0)	3
(7, 2)	(4; 2, 1, 1, 1, 0)	(0, 3, 1)	4
(7, 3)	(4; 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 1)	1
(8, 0)	(4; 3, 1, 0, 0, 0)	(1, 3, 0)	4
(8, 1)	(3; 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 6, 0)	6
(8, 1)	(4; 2, 2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(8, 2)	(4; 2, 1, 1, 0, 0)	(0, 4, 0)	4
(8, 3)	(4; 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 4, 0)	4
(8, 3)	(5; 3, 1, 1, 1, 1)	(1, 6, 1)	8
(8, 4)	(5; 2, 2, 1, 1, 1)	(0, 3, 1)	4
(8, 5)	(6; 2, 2, 2, 2, 2)	(0, 0, 0)	0
(9, 0)	(4; 3, 0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0)	1
(9, 1)	(3; 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 10, 0)	10
(9, 2)	(4; 2, 1, 0, 0, 0)	(0, 3, 0)	3
(9, 3)	(4; 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 6, 0)	6
(9, 3)	(5; 3, 1, 1, 1, 0)	(1, 3, 0)	4
(9, 4)	(5; 2, 2, 1, 1, 0)	(0, 3, 0)	3
(9, 5)	(5; 2, 1, 1, 1, 1)	(0, 6, 0)	6
(9, 6)	(6; 2, 2, 2, 2, 1)	(0, 4, 1)	5
(10, 0)	(5; 4, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(10, 2)	(4; 2, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(10, 2)	(5; 3, 2, 0, 0, 0)	(1, 3, 0)	4
(10, 3)	(4; 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 6, 0)	6
(10, 3)	(5; 3, 1, 1, 0, 0)	(1, 1, 0)	2
(10, 4)	(5; 2, 2, 1, 0, 0)	(0, 4, 0)	4
(10, 4)	(6; 4, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0)	0
(10, 5)	(5; 2, 1, 1, 1, 0)	(0, 4, 0)	4
(10, 6)	(5; 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 10, 0)	10

(d, g)	$(a; b_1, \dots, b_5)$	(x, y, z)	trisecant line の本数
(10, 6)	(6; 3, 2, 1, 1, 1)	(1, 3, 0)	4
(10, 6)	(6; 2, 2, 2, 2, 0)	(0, 0, 0)	0
(10, 7)	(6; 2, 2, 2, 1, 1)	(0, 6, 0)	6
(10, 8)	(7; 3, 2, 2, 2, 2)	(1, 6, 1)	8
(11, 0)	(5; 4, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(11, 3)	(4; 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 4, 0)	4
(11, 3)	(5; 3, 1, 0, 0, 0)	(1, 0, 0)	1
(11, 4)	(5; 2, 2, 0, 0, 0)	(0, 6, 0)	6
(11, 4)	(6; 4, 1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0)	0
(11, 5)	(5; 2, 1, 1, 0, 0)	(0, 3, 0)	3
(11, 6)	(5; 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 6, 0)	6
(11, 6)	(6; 3, 2, 1, 1, 0)	(1, 3, 0)	4
(11, 7)	(6; 3, 1, 1, 1, 1)	(1, 0, 0)	1
(11, 7)	(6; 2, 2, 2, 1, 0)	(0, 3, 0)	3
(11, 8)	(6; 2, 2, 1, 1, 1)	(0, 6, 0)	6
(11, 9)	(7; 3, 2, 2, 2, 1)	(1, 4, 0)	5
(11, 10)	(7; 2, 2, 2, 2, 2)	(0, 10, 0)	10
(12, 0)	(6; 5, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(12, 3)	(4; 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(12, 3)	(5; 3, 0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0)	1
(12, 3)	(6; 4, 2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(12, 4)	(6; 4, 1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(12, 4)	(6; 3, 3, 0, 0, 0)	(2, 6, 0)	8
(12, 5)	(5; 2, 1, 0, 0, 0)	(0, 3, 0)	3
(12, 5)	(7; 5, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0)	0
(12, 6)	(5; 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 3, 0)	3
(12, 6)	(6; 3, 2, 1, 0, 0)	(1, 3, 0)	4
(12, 7)	(6; 3, 1, 1, 1, 0)	(1, 1, 0)	2
(12, 7)	(6; 2, 2, 2, 0, 0)	(0, 0, 0)	0
(12, 8)	(6; 2, 2, 1, 1, 0)	(0, 4, 0)	4
(12, 8)	(7; 4, 2, 1, 1, 1)	(0, 0, 0)	0
(12, 9)	(6; 2, 1, 1, 1, 1)	(0, 4, 0)	4
(12, 9)	(7; 3, 3, 1, 1, 1)	(2, 6, 0)	8
(12, 9)	(7; 3, 2, 2, 2, 0)	(1, 3, 0)	4
(12, 10)	(7; 3, 2, 2, 1, 1)	(1, 3, 0)	4
(12, 11)	(7; 2, 2, 2, 2, 1)	(0, 6, 0)	6
(12, 11)	(8; 4, 2, 2, 2, 2)	(0, 0, 0)	0
(12, 12)	(8; 3, 3, 2, 2, 2)	(2, 6, 0)	8
(12, 13)	(9; 3, 3, 3, 3, 3)	(5, 10, 1)	16

謝辞 本論文の執筆にあたり、多くの助言をしていただいた東海大学理学部情報数理学科の那須弘和教授に心から感謝の意を表します。主結果の価値と論文の質を高めるために有益なご指摘をいただいた査読者の方に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] O. A. Laudal, A generalized trisecant lemma. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, Tromsø, 1977)*, volume **687** of *Lecture Notes in Math.*, 112–149. Springer, Berlin, 1978.
- [2] E. Ballico and A. Cossidente, Surfaces in \mathbb{P}^5 which do not admit trisecants, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **29**(1) (1999) 77–91.
- [3] F. Russo and G. Staglianò, Trisecant flops, their associated K3 surfaces and the rationality of some cubic fourfolds, *J. Eur. Math. Soc.* **25** (2023), no. 6, 2435–2482.
- [4] I. Bauer, The classification of surfaces in \mathbb{P}^5 having few trisecant lines, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* **56** (1998), 1–20.
- [5] H. Nasu, Obstructions to deforming space curves lying on a del pezzo surface, arXiv:2501.15788.
- [6] A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, volume **34** of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.

1次元横磁場イジング模型におけるクリロフ複雑性の長時間ゆらぎ

深谷友也¹, 伊與田英輝*²

¹〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学大学院 理学研究科 物理学専攻

²〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

(2025年10月9日受付; 2025年12月5日受理)

Long-time Fluctuation of the Krylov Complexity in One-dimensional Transverse Field Ising Model

by

Tomoya FUKAYA¹ and Eiki IYODA*²

¹*Course of Physics, Graduate School of Science, Tokai University,
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa 259-1292, Japan*

²*Department of Physics, School of Science, Tokai University,
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa 259-1292, Japan*

*Corresponding author: E-mail: iyoda.eiki.g@tokai.ac.jp

(Received on Oct. 9, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

The mechanism of thermalization in isolated quantum many-body systems has been extensively studied through quantum chaos and the eigenstate thermalization hypothesis. Recently, the Krylov complexity has emerged as a powerful measure to characterize operator and state dynamics, with features such as its growth, peak structure, and long-time saturation linked to the chaotic behavior. In this work, we focus on the long-time regime of the Krylov complexity in the one-dimensional transverse-field Ising model and numerically calculate the finite-size scaling of its temporal fluctuations. Our results show that the long-time fluctuations grow polynomially with the Krylov subspace dimension, while their relative magnitude decreases, implying that fluctuations become negligible in the thermodynamic limit. We also discuss how the magnitude of fluctuations constrains the peak structure of the Krylov complexity, which acts as an order parameter for quantum chaotic-integrable transitions.

Keywords: Krylov complexity, Quantum chaos, Thermalization

1 序 論

孤立量子多体系におけるユニタリ時間発展のもとで熱平衡化がどのように生じるのかという問題は、古くから広く研究されてきた [1–3]. これまでに人工量子系を用いた実験的研究に加え [4–7], 理論的・数値的研究も数多く行われている [1–3, 8]. 熱平衡化の理解においては非可積分系が中心的な役割を果たしており, エネルギー準位統計 [9, 10] や固有状態熱化仮説 (Eigenstate Thermalization Hypothesis; ETH) [1–3, 11–15] など, 量子カオスの概念が重要な役割を果たしてきた. 当初の関心は主として局所的物理量の期待値が熱平衡化するかどうかに向けられていたが, 近年では非時間順序積相関 (Out-of-Time-Ordered Correlator; OTOC) [16, 17] やエンタングルメントエントロピー [18, 19] といった, 局所物理量の期待値では書けない複雑な量についても理論的・実験的に調べられている. 熱平衡化という過程を物理量の期待値に対するものを超えて一般的に捉え直すならば, 初期状態がユニタリ時間発展によって物理量の固有基底において複雑な状態へと変化していく過程, あるいはハイゼンベルク表示において物理量が非局所で複雑な演算子へと変化していく過程として捉えることができるだろう. このような過程を理解する試みの中で, 近年特に注目を集めているのがクリロフ複雑性 (Krylov complexity) と呼ばれる量である [20–22].

クリロフ複雑性は, 量子多体系における演算子が非局所で複雑なものへと成長する様子を捉える指標として導入された. 演算子成長を表す基底としてクリロフ基底を用いると, そこに現れるランチョス係数に普遍的な増加が現れるという仮説が提示された [20]. この普遍的な振る舞いは, 非局所な演算子を表現するためには指数関数的に多くの非局所な演算子が必要になることがその背景にあり, 物理的にはスペクトル関数の指数減衰や非対角 ETH と関係があると考えられている. この普遍的な増加を定量的に捉えるためにクリロフ複雑性が導入され, 多くの量子多体系でその時間発展が調べられている. 当初は演算子に関する議論が中心であったが, 状態についてのクリロフ複雑性も議論されている [22, 23]. 量子カオスの系においてシュレーディンガー方程式に従うダイナミクスを考えると, クリロフ複雑性は指数関数的に大きな値まで単調に増加し, その後ゆっくりと減少をして長時間領域の定常的なプラトーへと至る. ここに現れるピーク構造が非可積分系に特徴的なものであり, 可積分系ではピークが生じないことから, クリロフ複雑性のピークを量子カオスの秩序変数と見なすことが提案されている [21].

本研究では, 特に長時間領域における状態に関するクリロフ複雑性に注目し, その長時間ゆらぎに対する有限サイズスケーリングを明らかにすることを目的とする. 状態に関するクリロフ複雑性は, クリロフ基底における数演算子という非局所的な演算子の期待値として表現できる. 熱平衡化の文脈においては, 演算子の長時間ゆらぎを上から評価する不等式が知られており, 本研究ではこれをクリロフ基底の数演算子に適用する. さらに, 量子スピン系に対する数値計算を通じて, この不等式がどの程度タイトであるかを検証する. 加えて, 長時間ゆらぎの大きさを詳しく考察することで, クリロフ複雑性のピーク高さに関して簡単に議論する.

本論文の構成は以下の通りである. 2 節ではクリロフ基底とクリロフ複雑性を導入する. 3 節では物理量の長時間ゆらぎについての不等式を用いて, クリロフ複雑性のゆらぎについて議論する. 4 節では数値計算に用いた設定を説明する. 5 節では本研究で得られた数値計算の結果について議論する. 6 節ではまとめを行う. 付録では, 補足的な数値計算の結果を示す.

2 クリロフ基底とクリロフ複雑性

本節では文献 [22, 23] に基づいて, 状態に関するクリロフ基底と状態に関するクリロフ複雑性を導入

する. 以下, これらを単にクリロフ基底とクリロフ複雑性と呼び, $\hbar = 1$ の単位系をとる.

2.1 クリロフ基底

ここでは有限サイトの量子スピン系のような, 有限次元 (次元 D) の量子多体系を考える. クリロフ基底は初期状態 $|0\rangle$ とハミルトニアン H に対して, ベクトルの集合 $\{H^n|0\rangle\}_n$ を直交化することで生成することが出来る. $a_0 := \langle 0|H|0\rangle$, $b_0 := 0$ と定義し, 以下の式に従って帰納的にクリロフ基底 $\{|n\rangle\}$ を定義する.

$$|\tilde{n}\rangle := (H - a_n)|n\rangle - b_n|n-1\rangle, \quad (1)$$

$$b_{n+1} := \sqrt{\langle \tilde{n}|\tilde{n}\rangle}, \quad (2)$$

$$|n+1\rangle := |\tilde{n}\rangle/b_{n+1}, \quad (3)$$

$$a_{n+1} := \langle n+1|H|n+1\rangle. \quad (4)$$

ここで $|\tilde{n}\rangle$ は規格化されていないことに注意する. 生成されたクリロフ基底 $\mathcal{K} := \{|n\rangle\}$ は正規直交基底をなし, a_n, b_n はエネルギーの次元を持つ. a_n を対角成分, b_n をその隣の非対角成分に並べた三重対角行列を, 1次元系における相互作用しない系におけるハミルトニアンだと見なせるため, この1次元系をクリロフ鎖とも呼ぶ. 生成されたクリロフ基底の次元を $D_{\mathcal{K}}$ と書く. 特別な理由がなければ, $D_{\mathcal{K}}$ はヒルベルト空間の次元 D に等しい. しかし, 対称性や保存量が存在する場合, クリロフ部分空間の次元は $D_{\mathcal{K}} < D$ となることがあり, クリロフ部分空間の次元を超えてクリロフ基底を作ろうとしても, b_{n+1} がゼロになるため, それ以上基底は生成されない. また, D は系のサイト数 L に対して指数関数的に大きい. $D_{\mathcal{K}}$ は保存量の詳細に依存するが, 本研究で扱う状況では, $D_{\mathcal{K}}$ も系のサイト数 L に対して指数関数的に大きい.

クリロフ基底をエネルギー固有基底で展開する:

$$|n\rangle = \sum_{j=1}^{D_{\mathcal{K}}} f_{nj}|E_j\rangle. \quad (5)$$

ここで f_{nj} は二つの正規直交基底を繋ぐユニタリ行列の行列要素である. また, $|E_j\rangle$ はハミルトニアンと対称性に関する演算子の同時固有状態であり, そのため, j についての和の範囲は $1 \leq j \leq D_{\mathcal{K}}$ とした. クリロフ基底を生成する漸化式 (1)–(3) を用いると, 展開係数 f_{nj} が満たす以下の漸化式が得られる.

$$(E_j - a_n)f_{nj} = b_{n+1}f_{n+1,j} + b_n f_{n-1,j}. \quad (6)$$

なお, 初期状態が

$$|0\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle \quad (7)$$

と展開されるとすると, $f_{0j} = c_j$ が成り立つが, これが上記の漸化式の初期条件となる.

式 (6) を整理するため,

$$\hat{E}_n := \text{diag}(E_1 - a_n, E_2 - a_n, \dots, E_{D_{\mathcal{K}}} - a_n), \quad (8)$$

$$|f_n\rangle := (f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nD_{\mathcal{K}}})^T \quad (9)$$

を導入する. ここで f_{nj} がユニタリ行列の行列要素であるため,

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \quad (10)$$

が成り立つ. これらを用いると式 (6) は

$$\hat{E}_n |f_n\rangle = b_{n+1} |f_{n+1}\rangle + b_n |f_{n-1}\rangle \quad (11)$$

のように漸化式 (1)–(3) と同じ形に書き直せる.

2.2 クリロフ複雑性

クリロフ複雑性を定義するために, まずクリロフ基底における数演算子を定義する.

$$\mathcal{N} \equiv \sum_{n=0}^{D_{\mathcal{K}}-1} n |n\rangle \langle n|. \quad (12)$$

クリロフ複雑性は, 時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|0\rangle$ における期待値として

$$C(t) := \langle \psi(t) | \mathcal{N} | \psi(t) \rangle = \sum_n n |\langle n | \psi(t) \rangle|^2 \quad (13)$$

と定義される.

時刻 t の状態は

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t} |E_j\rangle \quad (14)$$

と書けるので, これを式 (13) に代入して式 (5) を用いて整理すると

$$C(t) = \sum_n n \left(\left| \sum_j f_{nj} c_j^* e^{iE_j t} \right|^2 - \left| \sum_j f_{nj} c_j^* \right|^2 \right) \quad (15)$$

を得る.

2.3 長時間平均と長時間ゆらぎ

物理量の時刻 t における期待値 $\langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$ の形で書ける量の長時間平均と長時間ゆらぎを計算するために, 以下では, 固有エネルギーに縮退がなく, 非共鳴条件 (non-resonant condition) を満たすとする. 縮退がないため, $E_j \neq E_k$ ($j \neq k$) が成り立つ. また, 非共鳴条件は, $E_i - E_j = E_k - E_l$ が $i = k$ かつ $j = l$ のときのみ成立するという条件である.

クリロフ複雑性は式 (13) で表されるように, 物理量の期待値として定義される. 固有エネルギーに縮退がない場合, クリロフ複雑性の長時間平均は以下のように表される.

$$\bar{C} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt C(t) \quad (16)$$

$$= \sum_{j=0}^{D-1} |c_j|^2 \langle E_j | \mathcal{N} | E_j \rangle \quad (17)$$

$$= \sum_j \sum_n |c_j|^2 n |f_{nj}|^2. \quad (18)$$

ここで式 (5)(12) を用いた. さらに, 固有エネルギーが非共鳴条件を満たす場合, クリロフ複雑性の長時間平均まわりの時間ゆらぎは

$$(\Delta C)^2 := \overline{(C(t) - \bar{C})^2} \quad (19)$$

$$= \sum_{j \neq k} |c_j|^2 |c_k|^2 |\langle E_j | \mathcal{N} | E_k \rangle|^2 \quad (20)$$

$$= \sum_{j \neq k} |c_j|^2 |c_k|^2 \left| \sum_n n f_{nj} f_{nk}^* \right|^2 \quad (21)$$

と表される.

3 クリロフ複雑性の緩和とゆらぎ

本節では, クリロフ複雑性の長時間ゆらぎのサイズ依存性について議論する.

物理量の期待値が緩和する条件は, 長時間平均および長時間ゆらぎを用いて議論されている. 固有エネルギーに縮退がなく, 非共鳴条件を満たす場合, 物理量 O の長時間ゆらぎは有効次元を用いて上から評価できる [8]:

$$(\Delta O)^2 \leq \frac{\|O\|^2}{D_{\text{eff}}}. \quad (22)$$

ここで $\|O\|$ は物理量 O の演算子ノルムであり, \hat{O} の最大特異値に等しい. D_{eff} は有効次元であり, 固有エネルギーに縮退がなく $|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle$ と展開できる場合, $D_{\text{eff}} := (\sum_j |c_j|^4)^{-1}$ と定義される.

ランダムな時刻における物理量の期待値 $\langle O(t) \rangle := \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$ をサンプルすることを考えると, チェビシェフの不等式により

$$P(|\langle O(t) \rangle - \overline{\langle O(t) \rangle}| > \delta) \leq \frac{(\Delta O)^2}{\delta^2} \quad (23)$$

のように, $\langle O(t) \rangle$ が長時間平均からずれる確率を時間ゆらぎを用いて上から評価することが出来る. 右辺が無視できる場合, この式は $\langle O(t) \rangle$ が長時間領域で長時間平均へと緩和することを表す.

不等式 (22) を \mathcal{N} に対して適用すると,

$$(\Delta C)^2 \leq \frac{\|\mathcal{N}\|^2}{D_{\text{eff}}} \quad (24)$$

が成り立つ. 式 (12) より $\|\mathcal{N}\| = D_{\mathcal{K}} - 1 = \mathcal{O}(D_{\mathcal{K}})$ である. ここで, $D_{\text{eff}} = \mathcal{O}(D_{\mathcal{K}}^\alpha)$ が成り立つとする. 初期状態がハミルトニアン固有基底においてランダムである場合, $\alpha = 1$ となる. すると,

$$(\Delta C)^2 \leq \mathcal{O}(D_{\mathcal{K}}^{2-\alpha}) \quad (25)$$

が成り立つ. α は一般に $0 \leq \alpha \leq 1$ なので, 時間ゆらぎは熱力学極限で発散してもおかしくない. 本研究では, 時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ を数値的に計算し, その $D_{\mathcal{K}}$ に対する有限サイズスケーリングを議論する.

式 (23) と (25) を合わせることで,

$$P(|C(t) - \bar{C}| > \delta) \leq \frac{\mathcal{O}(D_{\mathcal{K}}^{2-\alpha})}{\delta^2} \quad (26)$$

が成り立つ. 仮に δ が定数だとすると, 右辺は熱力学極限で発散するため, 式 (26) は意味のある制限を与えない. ずれ δ は \bar{C} よりも十分小さい量ならば $C(t)$ の緩和について物理的に意味がある議論が出来るが, \bar{C} は $\bar{C} = \mathcal{O}(D_{\mathcal{K}})$ のように L について指数関数的に大きい量だと考えられるため, $\delta = \mathcal{O}(D_{\mathcal{K}}^\beta)$ ($\beta < 1$) とおくことにする. すると, 式 (26) の右辺は $\mathcal{O}(D_{\mathcal{K}}^{2-\alpha-2\beta})$ となるため, $(2-\alpha)/2 < \beta < 1$ と置けば $C(t)$ が長時間平均からずれる確率は無視できる.

4 数値計算の設定

本節では、本研究で用いた数値計算の設定などについて説明する。

本研究ではスピン $1/2$ かつ 1次元（開放端境界条件）の横磁場イジング模型（TFI 模型）に縦磁場を加えたハミルトニアンを用いる。

$$H = -J \sum_{i=1}^{L-1} Z_i Z_{i+1} - h_z \sum_{i=1}^L Z_i - h_x \sum_{i=1}^L X_i. \quad (27)$$

ここで、 L はスピン鎖の長さ、 J は近接スピン間のイジング相互作用であり、 $h_z(h_x)$ は縦磁場（横磁場）を表す。 $J > 0$ をエネルギーのユニットとして扱い、 $h_x \neq 0$ を仮定する。この模型は $h_z = 0$ の場合は可積分であり、 $h_z \neq 0$ の場合に非可積分になる。

上記のハミルトニアンはパリティ対称性を持つ。 i 番目のサイトと $L-i$ 番目のサイトを入れ替えるパリティ演算子を P とすると、 $[H, P] = 0$ が成り立つ。全ヒルベルト空間の次元は $D = 2^L$ であるが、パリティが正の部分空間 \mathcal{H}_+ の次元 $D_+ := \dim \mathcal{H}_+$ とパリティが負の部分空間 \mathcal{H}_- の次元 $D_- := \dim \mathcal{H}_-$ は $D_{\pm} = 2^{L-1} \pm 2^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor}$ と書ける。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すガウス記号である。

本研究ではエネルギー固有状態を数値的厳密対角化で求める。 \mathcal{H}_+ における計算基底を用いて、ハミルトニアンを表す行列を求め、その固有値・固有ベクトルを数値的に求めている。

クリロフ基底を生成する際の初期状態 $|0\rangle$ として、以下の状態を用いた。

$$|X+\rangle := |x+\rangle^{\otimes L}, \quad (28)$$

$$|\text{Néel}\rangle := |z+\rangle \otimes |z-\rangle \otimes |z+\rangle \otimes |z-\rangle \otimes \cdots. \quad (29)$$

ここで $|x_{\pm}\rangle, |z_{\pm}\rangle$ はそれぞれパウリ X, Z の固有値 ± 1 の固有状態である。 $|X+\rangle$ は全てのスピンの正方向を向いた状態であり、 $|\text{Néel}\rangle$ はネール状態である。 $|X+\rangle$ は \mathcal{H}_+ の元であり、 $P|X+\rangle = |X+\rangle$ が成り立つ。また、 L が奇数の場合には $|\text{Néel}\rangle$ も \mathcal{H}_+ の元であり、 $P|\text{Néel}\rangle = |\text{Néel}\rangle$ が成り立つ。これらの初期状態はいずれも、量子もつれがないため、複雑ではない状態と見なすのは妥当であると考えられる。

数値的にクリロフ基底を生成する際は、クリロフ基底の正規直交性を精度よく求めるために、修正グラム・シュミット法を用いて数値誤差に対処している。つまり、式 (3) で求めた $|n+1\rangle$ に対して、 $\{|j\rangle\}_{0 \leq j \leq n}$ との直交化を順番に行なっている。同様に、式 (11) を用いて $|f_n\rangle$ を生成する際にも逐次、直交化を行なっている。また、クリロフ基底を生成する際に b_{n+1} がゼロの場合、クリロフ基底の生成をそこで停止するが、数値計算上は $b_{n+1} < 10^{-12}$ を満たした場合に b_{n+1} をゼロとみなしている。

5 結果と考察

本節では、数値計算の結果を示す。主に、ハミルトニアンは $h_x = -1.05J$ の TFI 模型とし、初期状態は $|X+\rangle$ の結果を示す。初期状態が $|\text{Néel}\rangle$ の場合の結果は付録 A で示す。

5.1 係数 b_n の振る舞い

まず、クリロフ基底の作成で重要な係数 b_n に関する結果を示す。ただし、後述するように可積分点 $h_z = 0$ については注意が必要である。

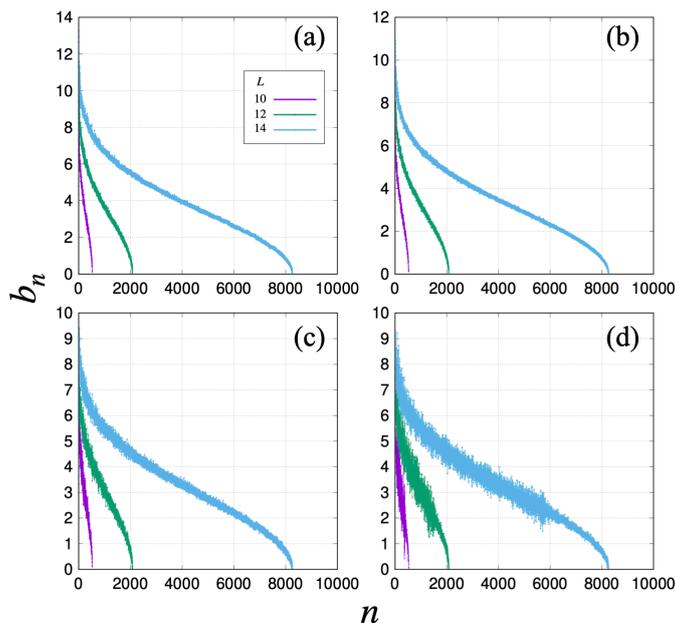


図 1 (a)–(d) 各パラメタにおける b_n の n 依存性. サイズ L はそれぞれ $L = 10, 12, 14$ である. $h_z > 0$ でのクリロフ次元はそれぞれ $D_K = D_+ = 528, 2080, 8256$ である. [パラメタ: (a) $h_z/J = 1$ (b) $h_z/J = 0.5$ (c) $h_z/J = 0.001$ (d) $h_z/J = 0$]

図 1 は b_n の n 依存性を示す. b_n は式 (2) で定義され, ハミルトニアンをクリロフ基底で三重対角行列で表した場合の非対角成分を表す. クリロフ鎖のハミルトニアンでは, 隣のサイトに飛び移る重なり積分を意味する. 図 1(a) は $h_z/J = 1$ の場合の結果であり, $L = 14, 12, 10$ のいずれの場合も, 計算した b_n は小さな乱れは伴いつつも n を大きくするにつれて概ね緩やかに減少する. n が非常に小さい領域と n が D_K に近い領域では, b_n の減少が著しく, $n \sim D_K$ では b_n は 0 へと近づく. また, 図 1(b)–(d) は $h_z/J = 0.5, 0.001, 0$ の結果を表しているが, 定性的に同じ振る舞いを示している.

以上の計算で得られた可積分点 ($h_z = 0$) の結果については注意が必要である. 上記の結果では, 非可積分のパラメタでは $D_K = D_+$ を満たしている. 一方, 可積分点では, 初期状態 $|X_+\rangle$ に対するクリロフ部分空間 \mathcal{H}_{X_+} は, パリティ正の部分空間 \mathcal{H}_+ の真の部分空間になっており, $\mathcal{H}_{X_+} \subset \mathcal{H}_+$ が成り立つ. そのため, $D_K < D_+$ になるはずだが, 得られた結果は $D_K = D_+$ となっている. これは, 上記の数値計算では, 可積分性に基づく部分空間の構造を利用した数値計算を行っていないため, 数値誤差によって, 生成されるクリロフ基底が \mathcal{H}_+ 全体に広がってしまっているからであると考えられる. そのため, 可積分点の結果については注意が必要であるが, 近可積分点 ($h_z/J = 0.001$) の結果と比較すると, 可積分点の結果も定性的には合っていると期待される.

5.2 クリロフ複雑性の時間発展

次に, クリロフ複雑性に関する結果を示す.

図 2 は $C(t)$ の時間依存性を表している. 図 2(a)(b) ではそれぞれ, サイズ L が一定で, 縦磁場の値を $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ と変化させた場合の $C(t)$ を示している. サイズ L は, 図 2(a) では $L = 10$, 図 2(b) では $L = 14$ である. 非可積分の場合の例として, 図 2(a)(b) において $h_z/J = 1$ の $C(t)$ に注目すると, 量子カオスの系において期待される $C(t)$ の典型的な振る舞いをしてい. つまり, $C(t)$ ははじめ 0 だが, そこから概ね単調に増加し, ある時刻で減少に転じてピークを形成し, その後, 長時間領域では概ね一定の値を取ってプラトーを形成する. この振る舞いは, $L = 10, 14$,

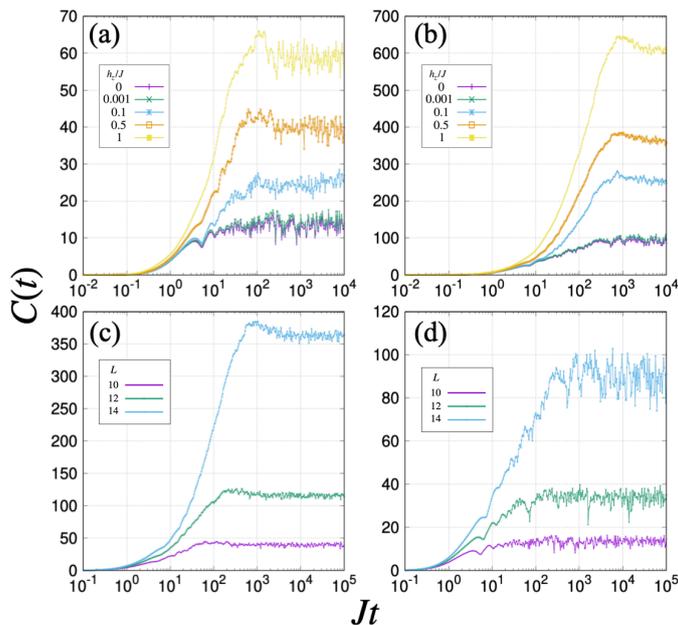


図 2 $C(t)$ の時間依存性. (a) (b) サイズ L は共通で $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ (bottom to top). サイズ : (a) $L = 10$, (b) $L = 14$. (c) (d) 縦磁場 h_z は共通で, $L = 10, 12, 14$ (bottom to top). 縦磁場 (c) $h_z/J = 0.5$ (非可積分), (d) $h_z = 0$ (可積分).

$h_z/J = 0.5, 1$ の場合には $L = 10, 14$ の両方で明瞭に見られる. $h_z/J = 0.1$ の場合には, $L = 10$ だとピーク構造は不明瞭であるが, $L = 14$ ではピークが見えている. $h_z/J = 0.001, 0$ の場合, つまり近可積分点と可積分点では, ピーク構造は見られない. これは, クリロフ複雑性が非可積分性の秩序変数であるという先行研究の期待と整合的である.

図 2(c)(d) はそれぞれ, 縦磁場の値が一定で, サイズ L を $L = 10, 12, 14$ と変化させた場合の $C(t)$ を示している. 図 2(c) は $h_z/J = 0.5$ の非可積分の結果を表しており, 長時間領域における $C(t)$ がサイズとともに指数関数的に増加していく様子がわかる. 図 2(d) は $h_z = 0$ の可積分点の結果である. 非可積分の場合と同様に長時間領域における $C(t)$ はサイズとともに指数関数的に増える. また, 図 2(c) と (d) を比べると, 可積分点では長時間ゆらぎが相対的に大きい.

5.3 有限サイズスケーリング

最後に, クリロフ複雑性の長時間平均 \overline{C} [式 (18)] や長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ [式 (21)] に関する有限サイズスケーリングの結果を示す.

図 3 は \overline{C} , $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\overline{C}$ の D_K 依存性を示す. サイズ L は $L = 10, 11, 12, 13, 14$, 縦磁場は $h_z/J = 1, 0.5, 0.1, 0.001, 0$ である. 図 3(a) は $C(t)$ の長時間平均 \overline{C} の D_K 依存性を示しており, \overline{C} がサイズ L に対して指数関数的に増大していることがわかる. この指数関数的増大は, 非可積分系でも, 可積分・近可積分系でも見られるが, 可積分・近可積分系では増加の程度がやや小さい. 同様に, 図 3(b) は $C(t)$ の長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ の D_K 依存性を示している. \overline{C} とは異なり, 有限サイズ効果が大きい, 概ね指数関数的な増大をしており, サイズが無大の極限で発散すると推測される. 図 3(c) は, $\Delta C/\overline{C}$ の D_K 依存性を示している. これは図 2 のような $C(t)$ のグラフにおいて, 長時間領域におけるゆらぎが, サイズ L を大きくすると見えなくなることを意味する.

\overline{C} , $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\overline{C}$ のサイズ依存性を調べるために, \overline{C} or $(\Delta C)^2 = \alpha D_K^\gamma$, $\Delta C/\overline{C} = \alpha D_K^{-\gamma}$ という関数形を仮定し, パラメタ α, γ を推定した. これらのパラメタを $\gamma_{\overline{C}}$ のように書く. 図 4 は γ の

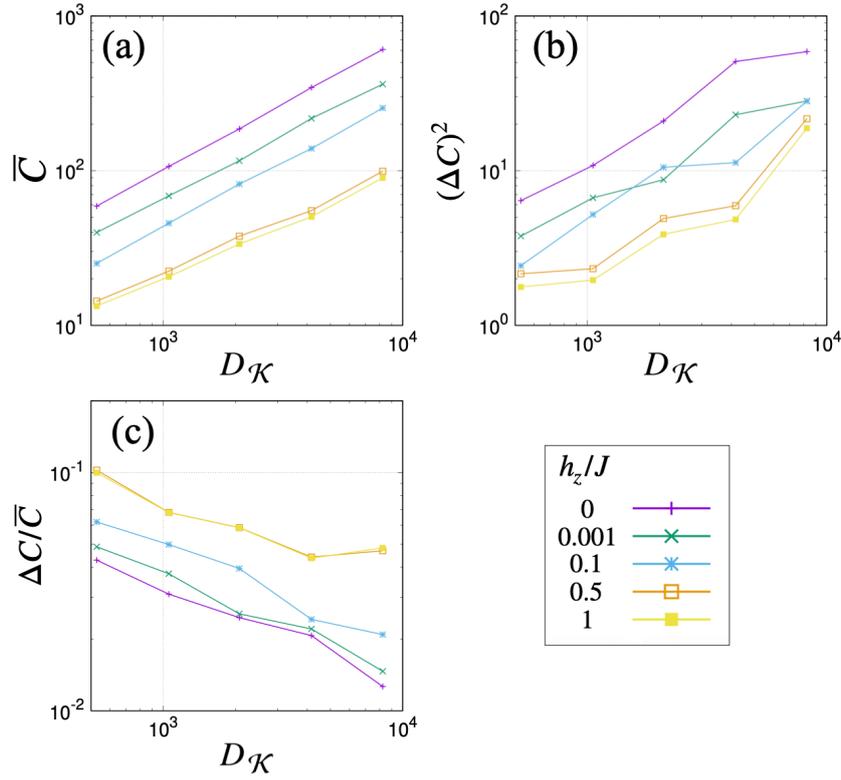


図 3 \bar{C} , $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性. [パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$ ($D_K = 528, 1056, 2080, 4160, 8256$), $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$]

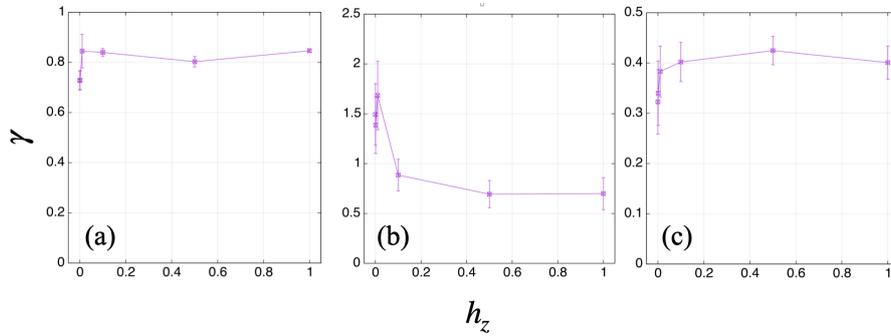


図 4 \bar{C} , $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\bar{C}$ のサイズ依存性をフィッティングして得られるべき γ の h_z 依存性. パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$. (a) \bar{C} , (b) $(\Delta C)^2$, (c) $\Delta C/\bar{C}$.

h_z 依存性を示す. 図 4(a)(b) が示すように, $\gamma_{\bar{C}}$ および $\gamma_{(\Delta C)^2}$ は, 非可積分の領域では h_z に大きく依存せず, 可積分点近くでやや小さい (大きい) 値を取る. $\gamma_{\Delta C/\bar{C}}$ の振る舞いは $\gamma_{\bar{C}}$ と似ており, 非可積分の領域では h_z に大きく依存せず, 可積分点近くでやや小さい値を取る [図 4(c)]. 式 (25) によると $\gamma_{(\Delta C)^2} = 2 - \alpha$ が成り立つはずだが, 図 4(b) に示すように, $\gamma_{(\Delta C)^2}$ は概ね 1 以下の値を取る. 図 5(a) は $|X\rangle$ に対する D_{eff} の D_K 依存性を表している. ここから α をフィッティングで推定すると, $h_z = 0, 0.5, 1$ に対して $\alpha \simeq 0.2$ となる. そのため, $2 - \alpha \simeq 1.8 > \gamma_{(\Delta C)^2}$ が成り立ち, これは式 (25) の不等式が非常に緩いことを示唆する.

この不等式の緩さの原因について考えるために, 不等式 (22) に立ち返る. この不等式は, $O_{ij} := \langle E_i | O | E_j \rangle$ とすると

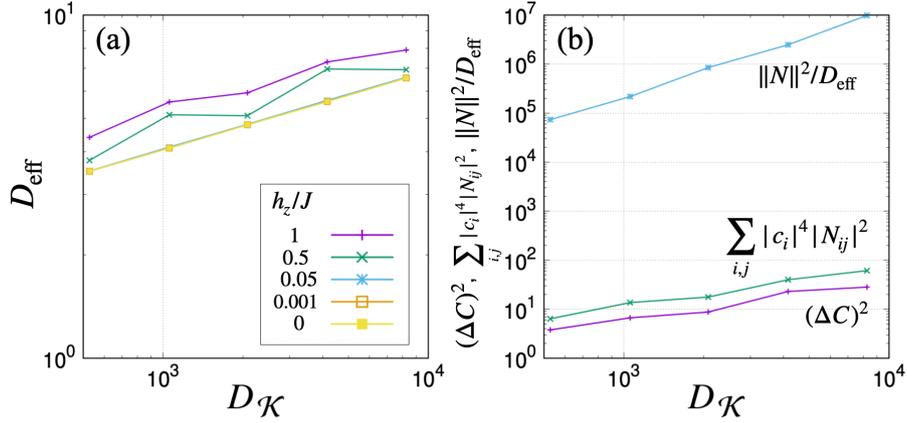


図 5 (a) 有効次元 D_{eff} の D_K 依存性 (b) $(\Delta C)^2$, $\sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2$, $\|N\|^2/D_{\text{eff}}$ の D_K 依存性 [パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$ ($D_K = 528, 1056, 2080, 4160, 8256$)]

$$(\Delta O)^2 = \sum_{i \neq j} |c_i|^2 |c_j|^2 |O_{ij}|^2 \quad (30)$$

$$\leq \sum_{i,j} |c_i|^4 |O_{ij}|^2 \quad (31)$$

$$\leq \frac{\|O\|^2}{D_{\text{eff}}} \quad (32)$$

のように示すことが出来る。ここで $O = \mathcal{N}$ として、式 (31) の右辺を評価し、 $(\Delta C)^2$, $\|C\|^2/D_{\text{eff}}$ と比較した結果を図 5(b) に示す。不等式 $(\Delta C)^2 \leq \sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2$ は、 $\sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2 \leq \|N\|^2/D_{\text{eff}}$ と比べると非常にタイトであることがわかる。これは、クリロフ基底における N_{ij} のばらつきが大きいことを意味する。また、この結果は、クリロフ基底の数演算子の緩和の議論では、有効次元 D_{eff} による議論では不十分であることも示唆している。

最後に、ピーク構造の高さについてコメントする。ピーク構造の高さを $\delta C_{\text{peak}} := C(t_{\text{peak}}) - \bar{C}$ と定義する。ここで t_{peak} は $C(t)$ がピークをとる時間である。図 2 のような $C(t)$ の t 依存性のグラフでピークが時間ゆらぎに埋もれずに見えるためには、 $\delta C_{\text{peak}} \gg \Delta C$ が必要である。そのため、 $\delta C_{\text{peak}} = \mathcal{O}(D_K^{\gamma_{\text{peak}}})$ と置くと、 $\gamma_{\text{peak}} > \gamma_{(\Delta C)^2}/2$ が必要である。図 4(b) の結果より、非可積分のパラメタでは $1/2 > \gamma_{(\Delta C)^2}/2$ が成り立つと期待される。すると、 $\gamma_{\text{peak}} > 1/2$ が有限系でピーク構造が見えるためには必要であると考えられる。

付録 A では、初期状態がネール状態 (29) の場合の数値計算結果を示すが、定性的には本節で議論したのと同じ結果である。

6 まとめと展望

本研究では長時間領域におけるクリロフ複雑性に注目し、そのサイズ依存性を数値的に求めた。特に、クリロフ複雑性の長時間平均 \bar{C} と長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ や、 $\Delta C/\bar{C}$ の熱力学極限における振る舞いを数値的に推測することが重要な目的である。数値計算の結果によると、 \bar{C} と $(\Delta C)^2$ はいずれもクリロフ部分空間の次元に対してべき的増大 (サイズに対して指数的増大) を示すが、 $\Delta C/\bar{C}$ はクリロフ部分空間の次元に対してべき的減衰 (サイズに対して指数減衰) を示す。そのため、長時間領域における時間ゆらぎはサイズが無限大の熱力学極限で相対的に無視できる。物理量の長時間ゆらぎは、有効次元を用いた不等式で上から抑えられることが多いが [式 (22)], 式 (31) のような不等式で抑えることがよ

り適切であることがわかった. これは, クリロフ複雑性を期待値として与える数演算子 [式 (12)] のエネルギー固有状態に対する行列要素が散らばっていることが原因だと考えられる. また, 非可積分性の秩序変数として提案されているクリロフ複雑性のピーク構造の高さは, 長時間ゆらぎよりも大きくなる必要があるが, 本研究の数値計算結果は, ピーク構造のサイズ依存性に対して制限を与えることがわかる.

今後の展望について述べる. まず, クリロフ複雑性のピーク構造やピークの位置についての系統的な数値計算は重要な課題である. クリロフ複雑性のピーク構造の有無は (非) 可積分性と関係しているため量子カオスの指標と言えるが, 既存の指標であるエネルギー準位統計や固有状態熱化仮説などとの共通点や違いについて明らかにすることが期待される. ただし, ピーク構造が見えるためには十分大きなサイズで計算を行う必要があり, 特に有限サイズ効果が大きくなる可積分点に近づくほど要求されるサイズが大きくなる. 特に, 本研究では, 可積分点の計算が十分に出来ておらず, クリロフ次元 D_K が期待される値になっていないため, 可積分性を活かした計算をすることは今後の課題である. また, 初期状態やハミルトニアンについてのより一層の系統的な数値計算が必要だと考えられる. 特に量子多体傷跡状態が生じる PXP 模型などの模型では高々弱い ETH [24–26] しか成り立たず [27, 28], 初期状態の選択が重要になるため, クリロフ複雑性の初期状態依存性を調べるのに適した模型であると考えられる.

付録 A 数値計算の補足

図 A・1 は初期状態がネール状態 (29) の場合の $C(t)$ の時間依存性と $\Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性である. 初期状態が $|X+\rangle$ [式 (28)] の場合と定性的に同じ振る舞いをしてい

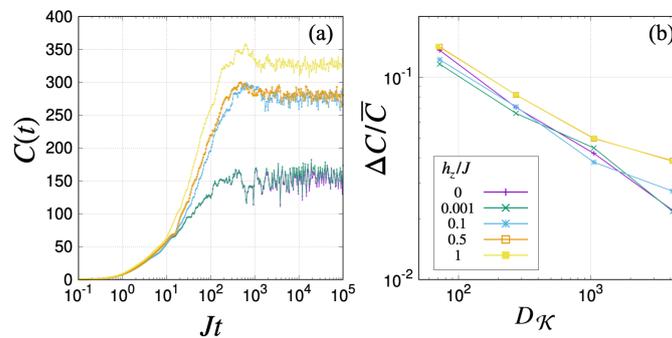


図 A・1 (a) $C(t)$ の時間依存性. サイズは $L = 13$ で $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ (bottom to top). (b) $\Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性 ($L = 7, 9, 11, 13$).

参考文献

- [1] C. Gogolin, and J. Eisert, *Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems*, Rep. Prog. Phys. **79**, (2016) 056001.
- [2] L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, *From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics*, Adv. Phys. **65**, (2016) 239.
- [3] T. Mori, T. N. Ikeda, E. Kaminishi, and M. Ueda, *Thermalization and Prethermalization in Isolated Quantum Systems: A Theoretical Overview*, J. Phys. B **51**, (2018) 112001.
- [4] M. Gring et al., *Relaxation and Pre-thermalization in an Isolated Quantum System*, Science **337**, (2012) 1318.
- [5] S. Trotzky, Y. Chen, A. Fleisch, I. P. McCulloch, U. Schollwöck, J. Eisert, I. Bloch, *Probing the*

- relaxation towards equilibrium in an isolated strongly correlated one-dimensional Bose gas*, Nature Physics **8**, (2012) 325.
- [6] C. Neill et al., *Ergodic dynamics and thermalization in an isolated quantum system*, Nature Physics **12**, (2016) 1037.
- [7] G. Clos, D. Porras, U. Warring, and T. Schaetz, *Time-Resolved Observation of Thermalization in an Isolated Quantum System*, Phys. Rev. Lett. **117**, (2016) 170401.
- [8] P. Reimann, *Foundation of Statistical Mechanics under Experimentally Realistic Conditions*, Phys. Rev. Lett. **101**, (2008) 190403.
- [9] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos — an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [10] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, *Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles*, Phys. Rev. Lett. **110**, (2013) 084101.
- [11] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, *Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems*, Nature **452**, (2008) 854.
- [12] W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, *Finite-Size Scaling of Eigenstate Thermalization*, Phys. Rev. E **89**, (2014) 042112.
- [13] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, *Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis*, Phys. Rev. E **90**, (2014) 052105.
- [14] T. Yoshizawa, E. Iyoda, and T. Sagawa, *Numerical Large Deviation Analysis of the Eigenstate Thermalization Hypothesis*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 200604.
- [15] S. Sugimoto, R. Hamazaki, and M. Ueda, *Test of the Eigenstate Thermalization Hypothesis Based on Local Random Matrix Theory*, Phys. Rev. Lett. **126**, (2021) 120602.
- [16] J. Li, R. Fan, H. Wang, B. Ye, B. Zeng, H. Zhai, X. Peng, and J. Du, *Measuring Out-of-Time-Order Correlators on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Simulator*, Phys. Rev. X **7**, (2017) 031011.
- [17] A. M. Green, A. Elben, C. H. Alderete, L. K. Joshi, N. H. Nguyen, T. V. Zache, Y. Zhu, B. Sundar, and N. M. Linke, *Experimental Measurement of Out-of-Time-Ordered Correlators at Finite Temperature*, Phys. Rev. Lett. **128**, (2022) 140601.
- [18] R. Islam, R. Ma, P. M. Preiss, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, and M. Greiner, *Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system*, Nature **528**, (2015) 77.
- [19] A. M. Kaufman, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, P. M. Preiss, and M. Greiner, *Quantum thermalization through entanglement in an isolated many-body system*, Science **353**, (2016) 794.
- [20] D. E. Parker, X. Cao, A. Avdoshkin, T. Scaffidi, and E. Altman, *A Universal Operator Growth Hypothesis*, Phys. Rev. X **9**, (2019) 041017.
- [21] M. Baggioli, K.-B. Huh, H.-S. Jeong, K.-Y. Kim, and J. F. Pedraza, *Krylov complexity as an order parameter for quantum chaotic-integrable transitions*, Phys. Rev. Research **7**, (2025) 023028.
- [22] V. Balasubramanian, P. Caputa, J. M. Magan, and Q. Wu, *Quantum chaos and the complexity of spread of states*, Phys. Rev. D **106**, (2022) 046007.
- [23] M. Alishahiha, S. Banerjee, and M. J. Vasli, *Krylov complexity as a probe for chaos*, Eur. Phys. J. C **85**, (2025) 749.
- [24] G. Biroli, C. Kollath, and A. M. Läuchli, *Effect of Rare Fluctuations on the Thermalization of Isolated Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **105**, (2010) 250401.
- [25] T. Mori, *Weak eigenstate thermalization with large deviation bound*, arXiv: 1609.09776.
- [26] E. Iyoda, K. Kaneko, and T. Sagawa, *Fluctuation Theorem for Many-Body Pure Quantum States*, Phys. Rev. Lett. **119**, (2017) 100601.
- [27] M. Serbyn, D. A. Abanin, and Z. Papić, *Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity*, Nature Physics **17**, (2021) 675.
- [28] S. Moudgalya, B. A. Bernevig and N. Regnault, *Quantum many-body scars and Hilbert space fragmentation: a review of exact results*, Rep. Prog. Phys. **85**, (2022) 086501.

編集委員長 CHIEF EDITOR
新屋敷 直木 Naoki SHINYASHIKI

編集委員 EDITORS
笹木 集夢 Atsumu SASAKI
松本 哲志 Satoshi MATSUMOTO
北林 照幸 Teruyuki KITABAYASHI
伊藤 建 Takeru ITO
高阪 史明 Fumiaki KOHSAKA
遠藤 雅守 Masamori ENDO
関根 嘉香 Yoshika SEKINE

幹事 SECRETARY
前田 陽一 Yoichi MAEDA

Proceedings of the School of Science of Tokai University

第 61 卷

2026 年 3 月 20 日 発行

編集兼発行者 東海大学理学部
神奈川県平塚市北金目 4-1-1
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa-ken, Japan
